2012-2013	Contrôle de connaissances	Correction	Math.

Exercice 1 :

Soit f définie par f(x) = $\ln\left(e^x - 1\right)$

i) Déterminer le domaine de définition de f. $D_f =]0\,;+\infty[$

ii) Calculer la dérivée de f. $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

iii) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

Exercice 2 :

Déterminer la différentielle de la fonction f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x, y) = 3x^2 \cos y - y \sin x$

$df(x, y) = \left(6x \cos y - y \cos x\right) dx + \left(-3x^2 \sin y - \sin x\right) dy$

Exercice 3 :

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^2 (x+2) e^{-x} dx = -5e^{-2} + 3$

Exercice 4 :

Soit $\{0\,;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère orthonormé de l'espace.

Soient A(2, 0, 1), B(1, 1, 1) et C(-1, 3, 2).

i) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$

ii) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) Calculer $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2}$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{19}$.

Exercice 5 :

Résoudre : $\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = x + 1 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$.

$y(x) = -6e^{\frac{x}{2}} + 3e^x + x + 4$

T.S.V.P.

Exercice 6 :

$$\text{Soit } \vec{V} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3 \\ M(x,y,z) \mapsto \vec{V}(M) \begin{pmatrix} x\cos z + \ln\left(y^2\right) \\ 3xy^2 z + 4 \\ \dfrac{\sin x}{z^3} - e^z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Calculer $div_M \vec{V} = \cos z + 6xyz - 3\dfrac{\sin x}{z^4} - e^z$ et $\overrightarrow{rot}_M \vec{V} \begin{pmatrix} -3xy^2 \\ -\dfrac{\cos x}{z^3} - x\sin z \\ 3y^2 z - \dfrac{2}{y} \end{pmatrix}$

Exercice 7 :

$$\text{Soit } \vec{V} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3 \\ M(x,y,z) \mapsto \vec{V}(M) \begin{pmatrix} \dfrac{2\cos z}{y} - z\cos x \\ -\dfrac{2x}{y^2}\cos z + e^y \\ -\dfrac{2x}{y}\sin z - \sin x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

i) Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f que l'on déterminera.

$\mathrm{f}(M) = 2\dfrac{x}{y}\cos z - z\sin x + e^y$

ii) Calculer $\Delta_M f = z\sin x + \dfrac{4x}{y^3}\cos z + e^y - \dfrac{2x}{y}\cos z$.

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{1-\cos x} = 2$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{3x}}{\ln(1-2x)} = \dfrac{3}{2}$