CONCOURS INTERNE ET EMPLOIS RESERVES 2010 DE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA METEOROLOGIE

FILIERE EXPLOITATION

-:-:-:-:-:-

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures ***Coefficient : 4***

-:-:-:-:-:-:-

La clarté des explications et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'évaluation des copies

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Barème envisagé :
exercice 1 : 4 points, exercice 2 : 4 points, exercice 3 : 7 points et exercice 4 : 5 points.

<u>EXERCICE 1 :</u>

Soient un segment [A, B] du plan de longueur 8 unités et M un point de [A, B]. On notera x la longueur du segment [A, M]. On considère les points C et D tels que AMCD soit un carré et un triangle MBE rectangle et isocèle en E.

1- Déterminer f(x) la somme des aires du carré AMCD et du triangle MBE.

2- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la valeur de f(x) est maximale, puis minimale.

EXERCICE 2 :

Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1- Calculer les modules et arguments de z_1 et z_2.

2- Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du produit ($z_1 \times z_2$).

3- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 3 :

On considère le plan P rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), unité graphique 4 cm.

Soit la fonction f de courbe représentative C définie sur $[0,+\infty[$ par : f(x) =

$$\begin{cases} x \ln \dfrac{x+2}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1- Déterminer la limite de f en 0.

2- La fonction est-elle dérivable en 0 ?

3- Déterminer f(x) en fonction de h(x) = $\frac{2}{x}$, pour x > 0.

4- En déduire la limite de f(x) en $+\infty$.

5- Calculer f'(x) pour $x > 0$ et vérifier que f''(x) = $\frac{-4}{x(x+2)^2}$.

6- Etudier le sens de variation de f' et trouver la limite de f'(x) en $+\infty$.

7- En déduire le tableau de variation de f.

8- Déterminer les tangentes T_0 et T_2 à C aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 2$ respectivement.

9- Tracer sur un même graphique C, T_0 et T_2.

EXERCICE 4 :

On considère les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = 5 \; ; \; b_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{(3a_n + 2b_n)}{5} \\ b_{n+1} = \dfrac{(2a_n + 3b_n)}{5} \end{cases}.$$

Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$.

1- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

2- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

3- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n.

4- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.

5- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

6- Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

7- Calculer les limites, si elles existent, des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.