Correction

Exercice 1 : Etude d'une suite réelle

On considère une droite *D* munie d'un repère $\left(O,\vec{i}\right)$ et une suite *(A_n)* de points de *D* définie par :

- $A_0 = O$
- A_1 est le point d'abscisse 1
- Pour tout entier naturel *n*, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n, A_{n+1}]$

On note a_n l'abscisse de point A_n.

1- On calcule a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et a_n. On obtient, pour tout entier naturel *n* :

A	B	C	D
$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$	$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$	$a_{n+2} = \left\lvert\frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right\rvert$	$a_{n+2} = \left\lvert\frac{a_{n+1}}{2}\right\rvert$

2- On peut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* :

A	B	C	D
$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$	$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}$	$a_{n+1} = -\frac{a_n}{2} + 1$	$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$

3- On considère la suite (b_n) définie par : $b_n = a_n - \frac{2}{3}$. On peut montrer que cette suite est géométrique, en déduire sa limite, puis celle de la suite (a_n). On obtient :

A	B	C	D
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$

(b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$

Exercice 2 : Etude d'une fonction et d'une suite récurrente

On considère une fonction f définie sur $D = [0,+\infty[$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$ et une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \in D \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. On pose $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ et $\beta = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$

1- On étudie les variations de la fonction f et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$. On obtient :

A	B	C	D
f décroissante et il existe deux solutions α et β à $f(x) = x$	f croissante et il existe deux solutions α et β à $f(x) = x$	f décroissante et il existe une unique solution α à $f(x) = x$	f croissante et il existe une unique solution α à $f(x) = x$

a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 0 - 5 \times \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{5}{(x+1)^2}.$$

La dérivée de f est strictement positive sur $[0,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow x - 6 + \frac{5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-6)(x+1)+5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 5x - 1$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) = 29$. L'équation $x^2 - 5x - 1 = 0$ admet donc deux racines réelles à savoir $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ et $\beta = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$. β est strictement négatif (car $\sqrt{29} > \sqrt{25} = 5$) et α est strictement positif. Donc

l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,+\infty[$, le nombre $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

2- On étudie les variations et la limite de la suite (u_n) pour $a = 8$. On a :

A	B	C	D
(u_n) croissante et de limite α	(u_n) décroissante et de limite α	(u_n) croissante et de limite β	(u_n) décroissante et de limite β

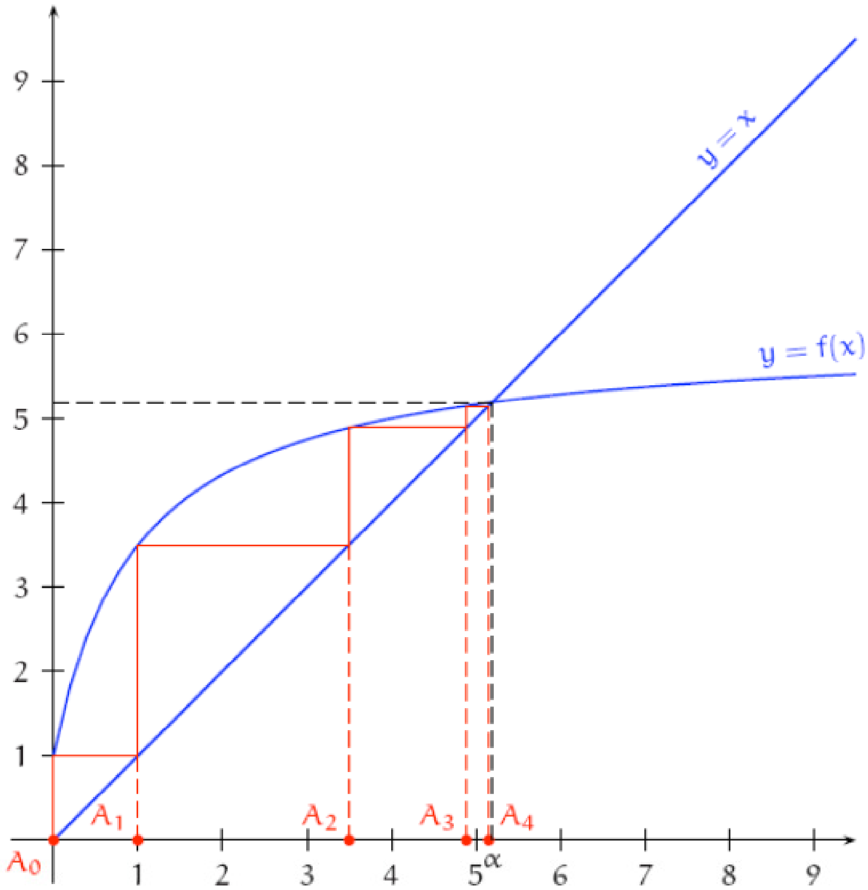
Si $u_0 > \alpha$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers α.

3- On étudie les variations et la limite de la suite (u_n) pour $a = 2$. On a :

A	B	C	D
(u_n) croissante et de limite α	(u_n) décroissante et de limite α	(u_n) croissante et de limite β	(u_n) décroissante et de limite β

Si $0 \leqslant u_0 < \alpha$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α.

Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$



Exercice 3 : Géométrie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne quatre points : *A*(1, 2, -1), *B*(-3, -2, 3), *C*(0, -2, -3) et *D*(1, 1, 1).

1- Soient $\vec{u}(-1,2,1)$ et $\vec{v}(2,-1,1)$:

A	B	C	D
A, B, C alignés et $\vec{u}$ vecteur normal à la droite (*AB*).	*A, B, C* alignés et $\vec{v}$ vecteur normal à la droite (*AB*).	*A, B, C* non alignés et $\vec{u}$ vecteur normal au plan (*ABC*).	*A, B, C* non alignés et $\vec{v}$ vecteur normal au plan (*ABC*).

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4, -4, 4)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1, -4, -2)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors nécessairement $-1 = -4k$ et $-4 = -4k$. Ceci impose à la fois $k = \frac{1}{4}$ et $k = 1$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

b) Les points A, B et C définissent donc un unique plan et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan. Ensuite,

- $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times (-4) + (-1) \times (-4) + 1 \times 4 = -8 + 4 + 4 = 0$.
- $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-4) + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et finalement

$$\boxed{\text{le vecteur } \vec{n} \text{ est un vecteur normal au plan (ABC).}}$$

2- Soient *P* le plan dont une équation est : $x + y - z + 2 = 0$ et *d* la droite passant par *A* et dirigée par $\overrightarrow{DC}$.

A	B	C	D
P est orthogonal au plan (*ABC*) et à la droite *d*.	*P* n'est orthogonal ni au plan (*ABC*) ni à la droite *d*.	*P* est orthogonal au plan (*ABC*) mais pas à la droite *d*.	*P* est orthogonal à la droite *d* mais pas au plan (*ABC*).

2) Un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2, -1, 1)$ et un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\vec{n}'$ de coordonnées $(1, 1, -1)$. De plus,

$$\vec{n}.\vec{n}' = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Donc les vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux ou encore

$$\boxed{\text{les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.}}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}.\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow P // d$$ donc P n'est pas orthogonal à d.

3- On considère l'ensemble *E* des points *M* de l'espace qui vérifient : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 12$.

A	B	C	D
E est une droite	*E* est un cercle	*E* est un plan	*E* est une sphère

$$\boxed{\text{(S) est la sphère de centre G et de rayon } R = 6.}$$

où :

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point G sont } (2, 0, -5).}$$

Exercice 4 : Probabilités

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle suivante :

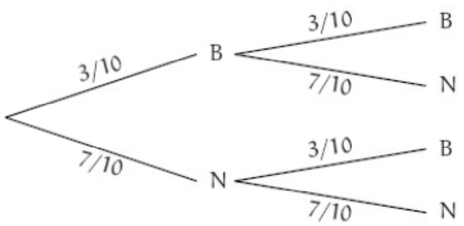
- un joueur perd 9€ si les deux boules tirées sont blanches
- un joueur perd 1€ si les deux boules tirées sont noires
- un joueur gagne 5€ si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

On note *p* la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

1- On obtient :

A	B	C	D
$p = 0{,}25$	$p = 0{,}42$	$p = 0{,}333...$	$p = 0{,}7$

1) On note N l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est noire » et B l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est blanche ». Représentons la situation par un arbre :



La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0,42.$$

2- Un joueur joue *n* parties identiques et indépendantes. On note p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des *n* parties. On a :

A	B	C	D
$p_n = 0{,}25n$	$p_n = 0{,}25^n$	$p_n = 1 - (0{,}58)^n$	$p_n = (0{,}58)^n$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candida t gagne la partie » avec une probabilité $p = 0,42$ (d'après la question précédente) ou « le candidat perd la partie » avec une probabilité $1 - p = 0,58$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b) $p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,42)^0(0,58)^n = 1 - (0,58)^n$.

3- On calcule *N* le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieur à 99%. On a :

A	B	C	D
$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1-(0,58)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow (0,58)^n \leqslant 0,01\\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,58)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \ \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n\ln(0,58) \leqslant \ln(0,01)\\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \Leftrightarrow n \geqslant 8,4\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 9 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}$$

Le joueur doit jouer un nombre minimal de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.