Concours externe et interne TSM (spécialité TSE) 2013

Partie A - Mathématiques

Le sujet comporte quatre exercices indépendants sous forme de QCM.
Une seule réponse est exacte par item.
Les résultats doivent être portés sur la feuille réponse fournie.

Exercice 1 : Etude d'une suite réelle

On considère une droite *D* munie d'un repère $\left(O,\vec{i}\right)$ et une suite (A_n) de points de *D* définie par :

- $A_0 = O$
- A_1 est le point d'abscisse 1
- Pour tout entier naturel *n*, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n, A_{n+1}]$

On note a_n l'abscisse de point A_n.

1- On calcule a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et a_n. On obtient, pour tout entier naturel *n* :

A	B	C	D
$a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$	$a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{2}$	$a_{n+2} = \left\lvert\dfrac{a_{n+1} - a_n}{2}\right\rvert$	$a_{n+2} = \left\lvert\dfrac{a_{n+1}}{2}\right\rvert$

2- On peut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* :

A	B	C	D
$a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{2}$	$a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$	$a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{2} + 1$	$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1$

3- On considère la suite $\left(b_n\right)$ définie par : $b_n = a_n - \dfrac{2}{3}$. On peut montrer que cette suite est géométrique, en déduire sa limite, puis celle de la suite $\left(a_n\right)$. On obtient :

A	B	C	D
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$

Exercice 2 : Etude d'une fonction et d'une suite récurrente

On considère une fonction f définie sur $D = [0,+\infty[$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$ et une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \in D \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \text{ entier naturel} \end{cases}$

On pose $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ et $\beta = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$

1- On étudie les variations de la fonction f et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$. On obtient :

A	B	C	D
f décroissante et il existe deux solutions α et β à $f(x) = x$	f croissante et il existe deux solutions α et β à $f(x) = x$	f décroissante et il existe une unique solution α à $f(x) = x$	f croissante et il existe une unique solution α à $f(x) = x$

2- On étudie les variations et la limite de la suite (u_n) pour $a = 8$. On a :

A	B	C	D
(u_n) croissante et de limite α	(u_n) décroissante et de limite α	(u_n) croissante et de limite β	(u_n) décroissante et de limite β

3- On étudie les variations et la limite de la suite (u_n) pour $a = 2$. On a :

A	B	C	D
(u_n) croissante et de limite α	(u_n) décroissante et de limite α	(u_n) croissante et de limite β	(u_n) décroissante et de limite β

Exercice 3 : Géométrie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne quatre points : A(1, 2, -1), B(-3, -2, 3), C(0, -2, -3) et D(1, 1, 1).

1- Soient $\vec{u}(-1,2,1)$ et $\vec{v}(2,-1,1)$:

A	B	C	D
A, B, C alignés et $\vec{u}$ vecteur normal à la droite (*AB*).	*A, B, C* alignés et $\vec{v}$ vecteur normal à la droite (*AB*).	*A, B, C* non alignés et $\vec{u}$ vecteur normal au plan (*ABC*).	*A, B, C* non alignés et $\vec{v}$ vecteur normal au plan (*ABC*).

2- Soient *P* le plan dont une équation est : $x + y - z + 2 = 0$ et *d* la droite passant par *A* et dirigée par $\overrightarrow{DC}$.

A	B	C	D
P est orthogonal au plan (*ABC*) et à la droite *d*.	*P* n'est orthogonal ni au plan (*ABC*) ni à la droite *d*.	*P* est orthogonal au plan (*ABC*) mais pas à la droite *d*.	*P* est orthogonal à la droite *d* mais pas au plan (*ABC*).

3- On considère l'ensemble *E* des points *M* de l'espace qui vérifient : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

A	B	C	D
E est une droite	*E* est un cercle	*E* est un plan	*E* est une sphère

Exercice 4 : Probabilités

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard, successivement et avec remise, deux boules dans cette urne. On établit la règle suivante :

- un joueur perd 9€ si les deux boules tirées sont blanches
- un joueur perd 1€ si les deux boules tirées sont noires
- un joueur gagne 5€ si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

On note p la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

1- On obtient :

A	B	C	D
$p = 0{,}25$	$p = 0{,}42$	$p = 0{,}333\ldots$	$p = 0{,}7$

2- Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties. On a :

A	B	C	D
$p_n = 0{,}25n$	$p_n = 0{,}25^n$	$p_n = 1 - (0{,}58)^n$	$p_n = (0{,}58)^n$

3- On calcule N le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieur à 99%. On a :

A	B	C	D
$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$