

Partie A - Mathématiques

Le sujet comporte quatre exercices indépendants sous forme de QCM.
Une seule réponse est exacte par item.
Les résultats doivent être portés sur la feuille réponse fournie.

Exercice 1 : Etude d'une suite réelle

On considère une droite D munie d'un repère (O, \vec{i}) et une suite (A_n) de points de D définie par :

- $A_0 = O$
- A_1 est le point d'abscisse 1
- Pour tout entier naturel n , le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n, A_{n+1}]$

On note a_n l'abscisse de point A_n .

1- On calcule a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et a_n . On obtient, pour tout entier naturel n :

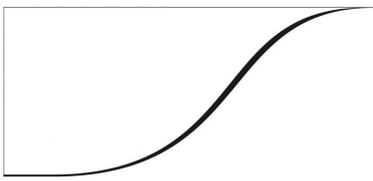
| A | B | C | D |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--|--|
| $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ | $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$ | $a_{n+2} = \left \frac{a_{n+1} - a_n}{2} \right $ | $a_{n+2} = \left \frac{a_{n+1}}{2} \right $ |

2- On peut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

| A | B | C | D |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$ | $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}$ | $a_{n+1} = -\frac{a_n}{2} + 1$ | $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$ |

3- On considère la suite (b_n) définie par : $b_n = a_n - \frac{2}{3}$. On peut montrer que cette suite est géométrique, en déduire sa limite, puis celle de la suite (a_n) . On obtient :

| A | B | C | D |
|---------------------------------------|---|---|---|
| $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$ |



Exercice 2 : Etude d'une fonction et d'une suite récurrente

On considère une fonction f définie sur $D = [0, +\infty[$ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$ et une suite (u_n)

définie par :
$$\begin{cases} u_0 = a \in D \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \text{ entier naturel} \end{cases}$$

On pose $\alpha = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$ et $\beta = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$

- 1- On étudie les variations de la fonction f et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$. On obtient :

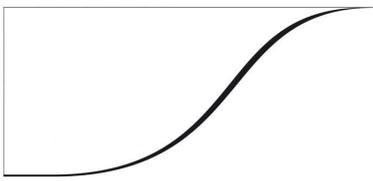
| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| f décroissante et il existe deux solutions α et β à $f(x) = x$ | f croissante et il existe deux solutions α et β à $f(x) = x$ | f décroissante et il existe une unique solution α à $f(x) = x$ | f croissante et il existe une unique solution α à $f(x) = x$ |

- 2- On étudie les variations et la limite de la suite (u_n) pour $a = 8$. On a :

| A | B | C | D |
|--|--|---|---|
| (u_n) croissante et de limite α | (u_n) décroissante et de limite α | (u_n) croissante et de limite β | (u_n) décroissante et de limite β |

- 3- On étudie les variations et la limite de la suite (u_n) pour $a = 2$. On a :

| A | B | C | D |
|--|--|---|---|
| (u_n) croissante et de limite α | (u_n) décroissante et de limite α | (u_n) croissante et de limite β | (u_n) décroissante et de limite β |



Exercice 3 : Géométrie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne quatre points : $A(1, 2, -1)$, $B(-3, -2, 3)$, $C(0, -2, -3)$ et $D(1, 1, 1)$.

1- Soient $\vec{u}(-1, 2, 1)$ et $\vec{v}(2, -1, 1)$:

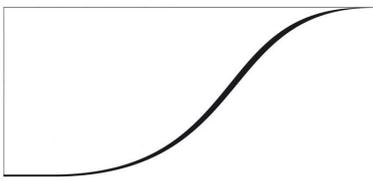
| A | B | C | D |
|--|--|---|---|
| A, B, C alignés et \vec{u} vecteur normal à la droite (AB) . | A, B, C alignés et \vec{v} vecteur normal à la droite (AB) . | A, B, C non alignés et \vec{u} vecteur normal au plan (ABC) . | A, B, C non alignés et \vec{v} vecteur normal au plan (ABC) . |

2- Soient P le plan dont une équation est : $x + y - z + 2 = 0$ et d la droite passant par A et dirigée par \vec{DC} .

| A | B | C | D |
|---|--|---|---|
| P est orthogonal au plan (ABC) et à la droite d . | P n'est orthogonal ni au plan (ABC) ni à la droite d . | P est orthogonal au plan (ABC) mais pas à la droite d . | P est orthogonal à la droite d mais pas au plan (ABC) . |

3- On considère l'ensemble E des points M de l'espace qui vérifient : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12$.

| A | B | C | D |
|--------------------|-------------------|-----------------|--------------------|
| E est une droite | E est un cercle | E est un plan | E est une sphère |



Exercice 4 : Probabilités

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard, successivement et avec remise, deux boules dans cette urne. On établit la règle suivante :

- un joueur perd 9€ si les deux boules tirées sont blanches
- un joueur perd 1€ si les deux boules tirées sont noires
- un joueur gagne 5€ si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

On note p la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

1- On obtient :

| A | B | C | D |
|------------|------------|------------------|-----------|
| $p = 0,25$ | $p = 0,42$ | $p = 0,333\dots$ | $p = 0,7$ |

2- Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties. On a :

| A | B | C | D |
|---------------|----------------|----------------------|------------------|
| $p_n = 0,25n$ | $p_n = 0,25^n$ | $p_n = 1 - (0,58)^n$ | $p_n = (0,58)^n$ |

3- On calcule N le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieur à 99%. On a :

| A | B | C | D |
|---------|---------|---------|----------|
| $N = 7$ | $N = 8$ | $N = 9$ | $N = 10$ |