CORRECTION

ETUDE DE FONCTION, CALCUL INTEGRAL, SUITES

Partie I

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

<u>Remarque :</u> cette forme n'est pas indéterminée.

f(x) = $3e^{-\frac{x}{2}} + 2\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$ (d'après le cours sur les croissances comparées).

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

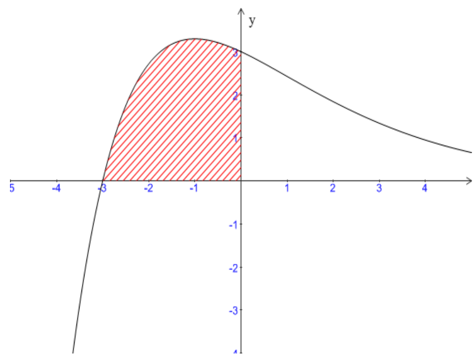
Pour tout réel x, on a : f '(x) = $-\frac{1}{2}(x+1)e^{-\frac{x}{2}}$.

Comme pour tout réel x : $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, on en déduit que f '(x) est du signe de $-\frac{1}{2}(x+1)$ donc que f est strictement croissante sur]-∞ ; -1] et strictement décroissante sur [-1 ; +∞ [.

3-

x	-∞	-1	+∞
f	-∞ ↗	f(-1)	↘ 0

f(-1) = $2\sqrt{e} \approx 3{,}3$



4- I = $\int_{-3}^{0} x\,e^{-\frac{x}{2}}dx$ se calcule en intégrant par parties :

On dérive la fonction polynomiale (u(x) = x et u'(x) = 1), et on intègre la fonction exponentielle (v'(x) = $e^{-\frac{x}{2}}$ et v(x) = $-2e^{-\frac{x}{2}}$).

I = $\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} -2e^{-\frac{x}{2}}dx = -6e^{\frac{3}{2}} - \left[4e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} = -2e^{\frac{3}{2}} - 4$.

Pour tout x de [-3 ; 0], f(x) ≥ 0. L'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples (x ; y) tels que $0 \le y \le f(x)$ et $x \le 0$ est donc :

A = $\int_{-3}^{0} f(x)dx = \int_{-3}^{0}(x+3)e^{-\frac{x}{2}}dx = I + 3\int_{-3}^{0} e^{-\frac{x}{2}}dx = -4 - 2e^{\frac{3}{2}} + 3\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} = -10 + 4e^{\frac{3}{2}}$ en unité d'aire.

Compte tenu de l'unité graphique, on a : A ≈ 31,7 cm²

5- a) f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
f est strictement croissante sur]-∞ ; -1] . $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et f(-1) ≈3,3 .

3 ∈]- ∞ ;f(-1)] donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x) = 3 admet une et une seule solution dans]-∞ ; -1].

f est strictement décroissante sur [-1 ; +∞ [. f(-1) ≈3,3 et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3 ∈]0 ; f(-1)] donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x) = 3 admet une et une seule solution dans [-1 ; +∞ [.
Comme f(0) = 3, 0 est la solution de l'équation f(x) = 3 dans l'intervalle [-1 ; + ∞ [. Soit α la solution non nulle. α ∈]-∞ ; -1].

On a : $f(-2) < 2{,}8 < 3 < 3{,}1 < f(-\frac{3}{2})$, et f strictement croissante sur $\left[-2;-\frac{3}{2}\right]$ donc $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$.

b) On déduit des variations de f que :

- Si $m > 2\sqrt{e}$ l'équation f(x) = m n'admet aucune solution ;
- Si $m = 2\sqrt{e}$ l'équation f(x) = m admet une solution : x = -1 ;
- Si $2\sqrt{e} < m < 0$ l'équation f(x) = m admet deux solutions ;
- Si $m \le 0$ l'équation f(x) = m admet une solution.

Partie II

1- $f(x) = 3 \Leftrightarrow (3+x)\, e^{-\frac{x}{2}} = 3 \Leftrightarrow 3 + x = 3\, e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x = 3\, e^{\frac{x}{2}} - 3 \Leftrightarrow \Phi(x) = x$.

on multiplie les deux membres par $e^{\frac{x}{2}}$ qui est non nul pour tout réel x

2- a) Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car la fonction exponentielle l'est, et pour tout réel x : $\Phi'(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

Φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle l'est, et pour tout réel x : $\Phi''(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{x}{2}}$.

$\Phi'(\alpha) = \frac{3}{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$ or f(α) = 3 donc $(3+\alpha)\, e^{-\frac{\alpha}{2}} = 3$ donc $e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha+3}{3}$. On a donc $\Phi'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$.

b) Pour tout réel x, Φ''(x) > 0, Φ' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, Φ'(x) > 0, Φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3- a) Soit x ∈ I. Φ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, Φ(x) ∈ [Φ(-2) ; Φ(α)].
$\Phi(-2) = 3e^{-1} - 3 \ge -2$, et Φ(α) = α (d'après la question **II-1-**). On a donc Φ(x) ∈ I.

b) Φ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout x de I, Φ'(x) ∈ [Φ'(-2) ; Φ'(α)].
$\Phi'(-2) = \frac{3}{2}e^{-1} \ge \frac{1}{2}$ et $\Phi'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$, avec $-2 \le \alpha \le -\frac{3}{2}$ donc $\Phi'(\alpha) \le \frac{3}{4}$.
En conclusion : $\frac{1}{2} \le \Phi'(x) \le \frac{3}{4}$

c) Pour tout x de I, $x \leq \alpha$, donc en appliquant l'inégalité de la moyenne on obtient :
$\frac{1}{2}(\alpha - x) \leq \int_x^\alpha \phi'(t)dt \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$ donc : $0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq \Phi(\alpha) - \Phi(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$.

4- a) Montrons par récurrence que la propriété P(n) : « $U_n \in I$ » est vraie pour tout entier naturel n :
Initialisation : $U_0 = -2 \in I$ donc P(0) est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose P(n) vraie, i.e. $U_n \in I$. D'après la question **II- 3-a)**, $\Phi(U_n) \in I$, donc $U_{n+1} \in I$, P(n+1) est donc vraie.
Conclusion : la propriété P(n) est vraie pour n = 0, elle est héréditaire pour tout entier n, elle est donc vraie pour tout n.

b) D'après la question **II- 3-c)**, pour tout entier n : $0 \leq \Phi(\alpha) - \Phi(U_n) \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$.

On a donc pour tout entier n : $0 \leq \alpha - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$.

Montrons pas récurrence que la propriété Q(n) : « $0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ » est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : On a $U_0 = -2$ et $-2 \leq \alpha \leq -\frac{3}{2}$ donc $0 \leq \alpha - U_0 \leq 1$. Q(0) est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose Q(n) vraie, i.e $0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

D'après la question **II-4-b)** on a : $0 \leq \alpha - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n) \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Q(n+1) est donc vraie.
Conclusion : La propriété Q(n) est vraie pour n = 0, elle est héréditaire pour tout entier n, elle est donc vraie pour tout entier n.

c) D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, on a : $\lim_{n \to +\infty} (\alpha - U_n) = 0$.
(U_n) converge donc vers α.

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2} \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} p \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leq \ln(10^{-2})$. Le plus petit entier p tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$ est p = 17.

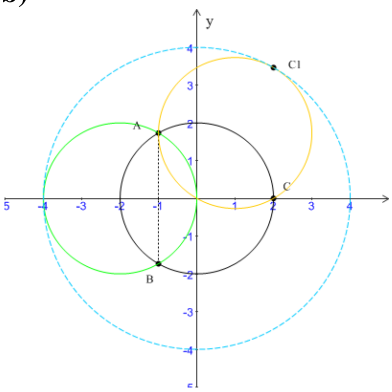
on applique la fonction ln, strictement croissante sur]0 ; +∞ [.

$U_{17} \approx -1{,}75$ qui est une valeur approchée de α à $2.\ 10^{-2}$ près.

NOMBRES COMPLEXES

1- a) $z_A = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$, $z_C = 2e^{0i}$.

b)



2- a) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}$; on a donc :

- $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$
- $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ $[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

Le triangle ABC est donc équilatéral direct.

b) Grâce aux formes exponentielles des affixes de A, B et C, on constate que $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$.

Le cercle circonscrit au triangle ABC est donc le cercle de centre O, de rayon 2.

<u>Remarque</u> :On peut aussi démontrer ce résultat en notant que le triangle ABC étant équilatéral, le centre de son cercle circonscrit est aussi le centre de gravité, c'est donc l'isobarycentre des sommets. Son affixe est donc $\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$*. Le rayon est alors donné par* $|z_A - z_0| = |z_A| = 2$*.*

3- a) $\Gamma_2 = \{M\ (z)\ /\ 2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0\ \}$.

Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

$M \in \Gamma_2$ si et seulement si $4x + x^2 + y^2 = 0$ donc si et seulement si $(x + 2)^2 + y^2 = 4$.

On reconnaît l'équation du cercle de centre Ω d'affixe -2 et de rayon 2.

b) $\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$. A et B sont donc des points de Γ_2

4- a) A étant le centre de la rotation, il est invariant par r.

La rotation est de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc l'image B' de B est telle que le triangle ABB' soit équilatéral direct. L'image de B par r est donc le point C.

Soit C_1 l'image du point C par la rotation r. $z_{C_1} = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_C - z_A) + z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$.

b) L'image du cercle Γ_2 par la rotation r est le cercle de centre l'image de 0, qui a pour affixe $1+i\sqrt{3}$, et de rayon 2.

5- a) Ω est le centre du cercle Γ_2, son image par R est donc le centre du cercle Γ_1 c'est le point O.
On en déduit que : $0 = a \times (-2) + b$ donc que $b = 2a$.

b) $z_{C'} = az_c + b = 2a + b = 4a$.

c) $|z_{C'}| = |4a| = 4|a| = 4$. Le point C' appartient donc au cercle de centre O et de rayon 4.
$|z_{C_1}| = |2+2i\sqrt{3}| = \sqrt{4+12} = 4$. C_1 appartient lui aussi au cercle de centre O et de rayon 4.