Concours interne TSE - Session 2011

CONCOURS INTERNE 2011
DE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA METEOROLOGIE (filière Exploitation)

****

CORRECTION EPREUVE DE MATHEMATIQUES

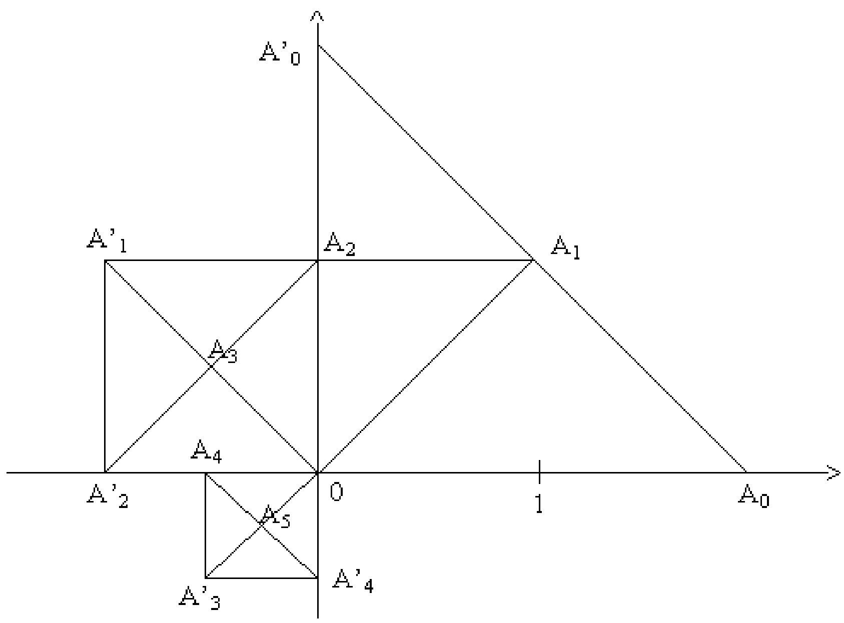
EXERCICE 1 : (*2 points*) f définie sur]0 ; 1[par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. $f(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

2. $F(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + K$ et $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 6 \Rightarrow K = 2$ donc $F(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + 2$.

EXERCICE 2 : (*7 points*)

1-



2- $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a'_n}{2} = \dfrac{a_n + ia_n}{2} = \dfrac{1+i}{2} a_n$.

3- $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_n$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\pi}{4} + \theta_n$.

4- $r_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n r_0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et $\theta_n = \theta_0 + n\dfrac{\pi}{4} = n\dfrac{\pi}{4}$.

5- $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

6- O, A_0 et A_n sont alignés si $\theta_n = k\pi$, donc si $n\dfrac{\pi}{4} = k\pi$, donc si n = 4k.

7- $A_nA_{n+1} = |a_{n+1} - a_n| = \left|\dfrac{1+2i}{2} a_n - a_n\right| = \left|\dfrac{i-1}{2}\right| |a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1}A_n$.

8- $L_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{n-1}A_n = A_0A_1 \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$

9- $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$

<u>EXERCICE 3 :</u> (*5 points*)

1- e – a = i(c – a), donc e = a + i(c – a).

2- g – a = -i(b – a), donc g = a - i(b – a).

3- $m = \dfrac{b+c}{2}$.

4- Affixe de $\overrightarrow{EG}$: g – e = -i(b – a + c – a) = i(2a – b – c)

Affixe de $\overrightarrow{AM}$: $m - a = \dfrac{b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-2a}{2} = \dfrac{g-e}{-2i}$,

Donc :

i) EG = |g – e| = 2a – b – c = 2AM

ii) et (EG) $\perp$ (AM)

EXERCICE 4 : (*6 points*)

1- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

2- La fonction f est non dérivable en 0 car : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = (\ln x)^2 + 1 \underset{x \to 0}{\to} +\infty$

3- T_0 est donc verticale, d'où $T_0 : x = 0$.

4- $f'(x) = (\ln x)^2 + 1 + 2 \ln x = (\ln x + 1)^2$, donc f croissante sur [0, 1].

5- $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, donc $T_1 : y = (x - 1) + 1$, donc $y = x$.

6- $f(x) - x = x(\ln x)^2 > 0$, donc C est au dessus de T_1.

7-