METEO FRANCE
Toujours un temps d'avance

CONCOURS INTERNE 2011
DE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA METEOROLOGIE (filière Exploitation)

****

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures ***Coefficient : 4***

La clarté des explications et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'évaluation des copies.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée, à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

L'utilisation de toute autre documentation (dictionnaire, support papier, téléphone portable ou assistant électronique, etc…) est strictement interdite.

Barème envisagé :
exercice 1 : 2 points, exercice 2 : 7 points, exercice 3 : 5 points, exercice 4 : 6 points.

Cette épreuve comporte 3 pages (celle-ci comprise)

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur]0 ; 1[par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.

2. En déduire la primitive F de f sur]0 ; 1[vérifiant la condition $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 6$.

EXERCICE 2 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, unité 4 cm, on construit une suite de points (A_n) de la façon suivante :

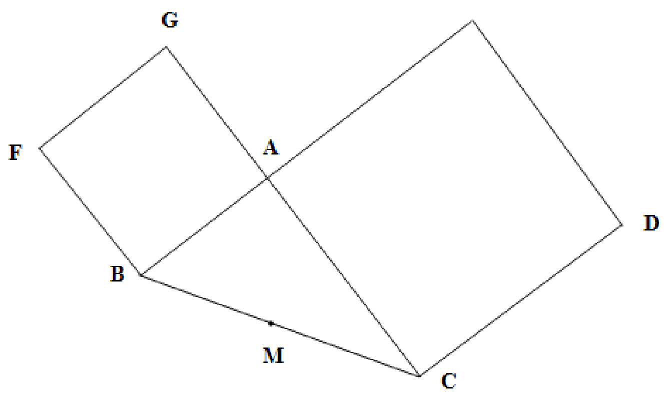
- A_0 est le point d'affixe $z_0 = 2$.
- Pour tout entier naturel n, si le point A_n d'affixe a_n a été construit, alors on désigne par B_n le point d'affixe $b_n = ia_n$ et par A_{n+1} le milieu de $[A_nB_n]$.

On note r_n le module de a_n et θ_n un argument de a_n.

1- Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sur un schéma.
2- Prouver que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = \frac{1+i}{2} a_n$.
3- En déduire que la suite (r_n) est géométrique et que la suite (θ_n) est arithmétique.
4- Exprimer r_n et θ_n en fonction de n.
5- Quelle est la limite de r_n ?
6- Pour quelles valeurs de n les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?
7- Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1}A_n$.
8- Exprimer, en fonction de n, la longueur L_n de la ligne brisée $A_0A_1\ldots A_n$.
9- Quelle est la limite de L_n ?

EXERCICE 3 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère un triangle direct ABC, le milieu M de [BC] et les carrés directs ACDE et AGFB.



On note a, b, c, e, g et m les affixes respectives des points A, B, C, E, G et M.

1- Exprimer e en fonction de c et a.
2- Exprimer g en fonction de b et a.
3- Exprimer m en fonction de b et c.
4- Démontrer que :
   i) EG = 2AM
   ii) (EG) $\perp$ (AM)

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur [0, 1] par :

- $f(0) = 0$
- $f(x) = x[(\ln x)^2 + 1]$ si $x > 0$

On notera C sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
2- La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3- Donner une équation de la tangente T_0 à C en x = 0.
4- Etudier les variations de f sur l'intervalle [0, 1].
5- Déterminer une équation de la tangente T_1 à C en x = 1.
6- Etudier la position relative de C par rapport à T_1.
7- Tracer T_0, T_1 et C sur un même graphique avec une échelle adaptée.