CONCOURS INTERNE 2012
DE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA METEOROLOGIE (filière Exploitation)

****

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures ***Coefficient : 4***

La clarté des explications et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'évaluation des copies.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée, à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

L'utilisation de toute autre documentation (dictionnaire, support papier, téléphone portable ou assistant électronique, etc…) est strictement interdite.

<u>Barème envisagé :</u> exercice 1 : 12 points, exercice 2 : 8 points.

Cette épreuve comporte 3 pages (celle-ci comprise)

<u>EXERCICE 1 :</u> ETUDE DE FONCTION, CALCUL INTEGRAL, SUITES

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 + x)\, e^{-\frac{x}{2}}$.

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2- Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de ses variations.

3- Construire la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4- Calculer $\int_{-3}^{0} x\, e^{-\frac{x}{2}} dx$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples (x ; y) tels que $0 \leq y \leq f(x)$ et $x \leq 0$. Donner une valeur approchée de cette aire en cm².

5- a) Démontrer que l'équation f(x) = 3 admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Soit α la solution non nulle ; montrer que $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$.

b) Plus généralement, déterminer *graphiquement* suivant les valeurs du nombre réel m le nombre de solutions de l'équation f(x) = m.

Partie II

On considère la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 3$.

1- Démontrer que f(x) = 3 si et seulement si Φ(x) = x.

2- Soient Φ' et Φ'' les dérivées première et seconde de la fonction Φ.

a) Calculer pour tout x réel, Φ'(x) et Φ''(x). Montrer que $\Phi'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$

b) Etudier le sens de variations de Φ', puis celui de Φ.

On se place désormais dans l'intervalle I = [-2 ; α].

3- Montrer que pour tout x appartenant à I :

a) Φ(x) appartient à I.

b) $\frac{1}{2} \leq \Phi'(x) \leq \frac{3}{4}$

c) En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq \Phi(\alpha) - \Phi(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$$

4- On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = \Phi(U_n)$.

a) Démontrer que pour tout entier n, U_n appartient à I.

b) Montrer que pour tout entier n : $0 \leq \alpha - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$, puis que :

$$0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

c) En déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.

d) Déterminer le plus petit entier p tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$.

Donner une approximation décimale à 10^{-2} près de U_p à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à $2 \cdot 10^{-2}$.

EXERCICE 2 : NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique : 2cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$, $z_C = 2$.

1- a) Exprimer les affixes de A, B et C sous forme exponentielle.

b) Placer les points sur un dessin.

2- a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

b) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.

3- a) Etablir que l'ensemble Γ_2 des points d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre **Ω** d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

b) Vérifier (par le calcul) que A et B sont des éléments de Γ_2.

4- On appelle r la rotation de centre A, et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r puis calculer son affixe.

b) Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r.

5- Soit R une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image du point M par la rotation R, et z' l'affixe de M'.
On a : z' = az + b, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
On suppose que R transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

a) Quelle est l'image du point **Ω** par R ? En déduire une relation entre a et b.

b) Déterminer en fonction de a l'affixe du point C', image du point C par la rotation R.

c) En déduire que le point C' appartient à un cercle fixe que l'on déterminera. Vérifier que ce cercle passe par C_1.