

Concours interne TSE - Session 2012

**CONCOURS INTERNE 2012  
DE TECHNICIEN SUPERIEUR DE LA METEOROLOGIE (filière Exploitation)**

\*\*\*\*\*

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

*Durée : 3 heures*

*Coefficient : 4*

*La clarté des explications et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'évaluation des copies.*

*L'utilisation de la calculatrice est autorisée, à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.*

*L'utilisation de toute autre documentation (dictionnaire, support papier, téléphone portable ou assistant électronique, etc...) est strictement interdite.*

*Barème envisagé : exercice 1 : 12 points, exercice 2 : 8 points.*

*Cette épreuve comporte 3 pages (celle-ci comprise)*

---

**EXERCICE 1 : ETUDE DE FONCTION, CALCUL INTEGRAL, SUITES**

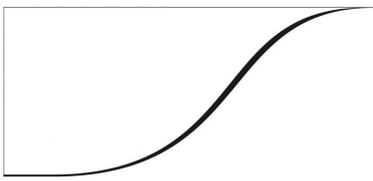
Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique : 2 cm)

**Partie I**

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (3 + x) e^{-\frac{x}{2}}$ .

**1-** Déterminer les limites de f en  $-\infty$  puis en  $+\infty$ .

**2-** Etudier les variations de f sur  $\mathbb{R}$ , et dresser le tableau de ses variations.



Concours interne TSE - Session 2012

**3-** Construire la courbe (C) représentative de f dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**4-** Calculer  $\int_{-3}^0 x e^{-\frac{x}{2}} dx$  et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples  $(x; y)$  tels que  $0 \leq y \leq f(x)$  et  $x \leq 0$ . Donner une valeur approchée de cette aire en  $cm^2$ .

**5- a)** Démontrer que l'équation  $f(x) = 3$  admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\alpha$  la solution non nulle ; montrer que  $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$ .

**b)** Plus généralement, déterminer *graphiquement* suivant les valeurs du nombre réel m le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ .

## Partie II

On considère la fonction  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\Phi(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 3$ .

**1-** Démontrer que  $f(x) = 3$  si et seulement si  $\Phi(x) = x$ .

**2-** Soient  $\Phi'$  et  $\Phi''$  les dérivées première et seconde de la fonction  $\Phi$ .

**a)** Calculer pour tout x réel,  $\Phi'(x)$  et  $\Phi''(x)$ . Montrer que  $\Phi'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$

**b)** Etudier le sens de variations de  $\Phi'$ , puis celui de  $\Phi$ .

On se place désormais dans l'intervalle  $I = [-2; \alpha]$ .

**3-** Montrer que pour tout x appartenant à I :

**a)**  $\Phi(x)$  appartient à I.

**b)**  $\frac{1}{2} \leq \Phi'(x) \leq \frac{3}{4}$

**c)** En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq \Phi(\alpha) - \Phi(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$$

**4-** On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = -2$  et  $U_{n+1} = \Phi(U_n)$ .

**a)** Démontrer que pour tout entier n,  $U_n$  appartient à I.

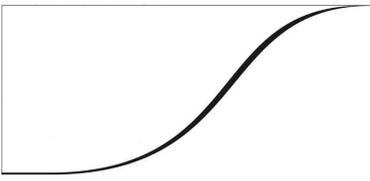
**b)** Montrer que pour tout entier n :  $0 \leq \alpha - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$ , puis que :

$$0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

**c)** En déduire que  $(U_n)$  est convergente et donner sa limite.

**d)** Déterminer le plus petit entier p tel que  $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$ .

Donner une approximation décimale à  $10^{-2}$  près de  $U_p$  à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de  $\alpha$  à  $2 \cdot 10^{-2}$ .



**EXERCICE 2 : NOMBRES COMPLEXES**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  (unité graphique : 2cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ,  $z_C = 2$ .

**1- a)** Exprimer les affixes de A, B et C sous forme exponentielle.

**b)** Placer les points sur un dessin.

**2- a)** Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

**b)** Déterminer le centre et le rayon du cercle  $\Gamma_1$  circonscrit au triangle ABC.

**3- a)** Etablir que l'ensemble  $\Gamma_2$  des points d'affixe  $z$  qui vérifient  $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$  est un cercle de centre  $\Omega$  d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire  $\Gamma_2$ .

**b)** Vérifier (par le calcul) que A et B sont des éléments de  $\Gamma_2$ .

**4-** On appelle  $r$  la rotation de centre A, et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

**a)** Quelles sont les images des points A et B par la rotation  $r$  ? Construire l'image  $C_1$  du point C par la rotation  $r$  puis calculer son affixe.

**b)** Déterminer l'image du cercle  $\Gamma_2$  par la rotation  $r$ .

**5-** Soit  $R$  une rotation. Pour tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on note  $M'$  l'image du point  $M$  par la rotation  $R$ , et  $z'$  l'affixe de  $M'$ .

On a :  $z' = az + b$ , avec  $a$  et  $b$  des nombres complexes vérifiant  $|a| = 1$  et  $a \neq 1$ .

On suppose que  $R$  transforme le cercle  $\Gamma_2$  en le cercle  $\Gamma_1$ .

**a)** Quelle est l'image du point  $\Omega$  par  $R$  ? En déduire une relation entre  $a$  et  $b$ .

**b)** Déterminer en fonction de  $a$  l'affixe du point  $C'$ , image du point C par la rotation  $R$ .

**c)** En déduire que le point  $C'$  appartient à un cercle fixe que l'on déterminera. Vérifier que ce cercle passe par  $C_1$ .