Math TSE 2012 Correction Option S

Exercice n°1 :

A. Préliminaires

On considère deux points quelconques *M* et *N* du plan.

1. $\|\vec{u}\| = 1$ pour $\vec{u} = \frac{1}{MN}\overrightarrow{MN}$.

2. Soit *Q* un point du segment $[MN]$ et soit le vecteur : $\vec{w} = \frac{1}{QM}\overrightarrow{QM} + \frac{1}{QN}\overrightarrow{QN}$.

   Le vecteur $\vec{w}$ est nul comme somme de 2 vecteurs unitaires colinéaires et de sens opposés.

B. On considère un triangle *ABC* du plan dont les trois angles sont aigus.

On note de la façon suivante les mesures des angles géométriques de ce triangle :

$$BAC = \alpha,\ ABC = \beta \text{ et } ACB = \gamma.$$

On désigne par A_1, le pied de la hauteur du triangle *ABC*, issue de *A*.

1. $\tan\beta = \frac{A_1A}{A_1B}$ et $\tan\gamma = \frac{A_1A}{A_1C}$, donc $\tan\beta\overrightarrow{A_1B} + \tan\gamma\overrightarrow{A_1C} = \vec{0}$ ce qui montre que A_1 est barycentre du système $\{(B, \tan\beta)\,;(C, \tan\gamma)\}$.
2. Par associativité, on a donc que l'orthocentre du triangle *ABC* est le barycentre de $\{(A,\ \tan\alpha)\,;(B, \tan\beta)\,;(C, \tan\gamma)\}$.
3. Soient *A′, B′* et *C′* les milieux des côtés respectifs [BC], [AC] et [AB].
   a. Les médiatrices du triangle *ABC* sont les hauteurs du triangle *A′B′C′* d'après le théorème de Thalès.
   b. Le centre *O* du cercle circonscrit au triangle *ABC* est barycentre des points *A′, B′* et *C′* affectés de coefficients *a′, b′* et *c′* égaux respectivement à $\tan\alpha;\ \tan\beta;\ \tan\gamma$.
   c. Le centre *O* du cercle circonscrit au triangle *ABC* est barycentre des points *A, B* et *C* affectés des coefficients *a, b* et *c* égaux respectivement à :

$$\frac{1}{2}(\tan\beta + \tan\gamma);\frac{1}{2}(\tan\alpha + \tan\gamma);\frac{1}{2}(\tan\alpha + \tan\beta).$$

Exercice n°2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans tout cet exercice, on désigne par $\bar{z}$ le complexe conjugué de *z*, par $|z|$ le module du complexe *z* et par arg(*z*) un argument de *z* (défini à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$).

Soit *F* la fonction qui, à tout point *M* du plan, d'affixe *z* non nulle, associe le point *M'* d'affixe *z'* définie par : $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

1. a. $|z'| = \frac{1}{|z|}$.

   b. arg(z') $= \pi +$ arg(*z*) donc les points *O, M* et *M'* sont alignés.

2. On considère le cercle Γ de centre *O* et de rayon 1. Soit *M* un point de Γ d'affixe *z*.

   a. $|z'|$ = 1.

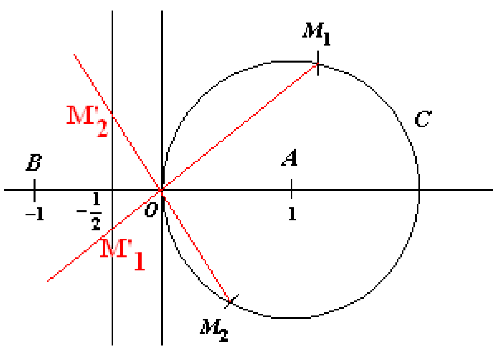
   b. L'image du cercle Γ par la fonction *F* est lui-même.

3. On appelle *A* et *B* les points d'affixes respectives 1 et –1 et *C* le cercle de centre *A*, contenant le point *O*. Soit *M* un point du plan d'affixe *z*.

   a. $|z-1|$ = 1.

   b. $\left|\frac{z'+1}{z'}\right|$=1. *BM'* = *OM'*. *M'* appartient à une droite fixe *D* : x = -1/2.

   c. Images M_1' et M_2' des points M_1 et M_2 :



   d. *F*(*C* privé de *O*) = D.

Exercice n°3 :

A. Etude d'une fonction f .

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

f (x) = ln(1 + 2x).

1. $f'(x)=\dfrac{2}{1+2x}>0$ sur l'intervalle I, donc *f* croissante.
2. $\lim\limits_{-1/2} f(x)=-\infty$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par g(x) = f (x) – x.
   a. $g'(x)=\dfrac{1-2x}{1+2x}>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$.
   b. $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$ et g(0) = 0 donc l'autre solution est β appartenant à l'intervalle [1; 2] car g(1) > 0 et g(2) < 0.
   c. g(x) > 0 $\Leftrightarrow x\in \left]0,\beta\right[$.
4. Pour tout réel x$\in \left]0;\beta\right[$, f (x) appartient à $\left]0;\beta\right[$ car $f(\beta)=1$ et $f(0)=0$.

B. Etude d'une suite récurrente.

On appelle $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=1$.

1. Par récurrence, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $\left]0;\beta\right[$ d'après (A-4).
2. Par récurrence la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante car *f* croissante et $u_0 < u_1$.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente car croissante et majorée par β .

C. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

1. Pour tout réel $x\geq 1, f'(x)=\dfrac{2}{1+2x}\leq\dfrac{2}{3}$.
2.
   a. En intégrant $f'(x)=\dfrac{2}{1+2x}\leq\dfrac{2}{3}$ on a : $\forall n, \int_{u_n}^{\beta} f'(t)dt\leq\dfrac{2}{3}(\beta-u_n)$.
   b. Donc, $\forall n, \beta-u_{n+1}\leq\dfrac{2}{3}(\beta-u_n)$, et par récurrence : $0\leq\beta-u_n\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   c. La limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc β .