Math TSE 2012 Option S

Calculatrice non programmable autorisée.

Exercice n°1 :

A. Préliminaires

On considère deux points quelconques M et N du plan.

1. Déterminer la norme $\|\vec{u}\|$, du vecteur $\vec{u} = \frac{1}{MN}\overrightarrow{MN}$.

2. Soit Q un point du segment $[MN]$ et soit le vecteur : $\vec{w} = \frac{1}{QM}\overrightarrow{QM} + \frac{1}{QN}\overrightarrow{QN}$.

   Justifier que le vecteur $\vec{w}$ est nul.

B. On considère un triangle *ABC* du plan dont les trois angles sont aigus.

On note de la façon suivante les mesures des angles géométriques de ce triangle :

$$BAC = \alpha,\ ABC = \beta \text{ et } ACB = \gamma.$$

On désigne par A_1, le pied de la hauteur du triangle *ABC*, issue de *A*.

1. Exprimer $\tan\beta$ et $\tan\gamma$ en fonction des longueurs des côtés de triangles judicieusement choisis de la figure donnée.
   Montrer que A_1 est barycentre du système $\{(B, \tan\beta) ; (C, \tan\gamma)\}$.
2. Justifier que le barycentre *H* du système $\{(A, \tan\alpha) ; (B, \tan\beta) ; (C, \tan\gamma)\}$ est l'orthocentre du triangle *ABC*.
3. Soient *A'*, *B'* et *C'* les milieux des côtés respectifs [BC], [AC] et [AB].

   a. Montrer que les médiatrices du triangle *ABC* sont les hauteurs du triangle *A'B'C'*.

   b. En déduire que le centre *O* du cercle circonscrit au triangle *ABC* est barycentre des points *A', B'* et *C'* affectés de coefficients *a', b'* et *c'* que l'on précisera.

   c. En déduire que le centre *O* du cercle circonscrit au triangle *ABC* est barycentre des points *A, B* et *C* affectés de coefficients *a, b* et *c* que l'on précisera.

Exercice n°2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans tout cet exercice, on désigne par $\overline{z}$ le complexe conjugué de *z*, par $|z|$ le module du complexe *z* et par arg(*z*) un argument de *z* (défini à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$).

Soit *F* la fonction qui, à tout point *M* du plan, d'affixe *z* non nulle, associe le point *M'* d'affixe *z'* définie par : $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1. a. Déterminer $|z'|$ en fonction de $|z|$.

   b. Déterminer un argument de z' en fonction d'un argument arg(*z*) de *z.*

   Que peut-on en déduire pour les points *O, M* et *M'* ?

2. On considère le cercle Γ de centre *O* et de rayon 1. Soit *M* un point de Γ d'affixe z.

   a. Déterminer $|z'|$.

   b. Quelle est l'image du cercle Γ par la fonction *F* ?

3. On appelle *A* et *B* les points d'affixes respectives 1 et –1 et *C* le cercle de centre *A*, contenant le point *O*. Soit *M* un point du plan d'affixe *z*.

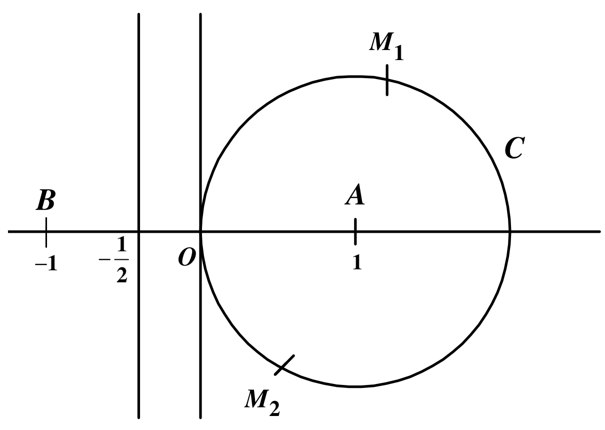
   a. Quelle relation doit vérifier z pour que *M* appartienne à *C* ?

   b. On suppose que *M* est un point du cercle *C*, différent de *O*. Calculer alors $\left|\dfrac{z'+1}{z'}\right|$.

   On justifiera le résultat. Comparer alors les longueurs *BM'* et *OM'*.

   En déduire que *M'* appartient à une droite fixe *D*, qu'on précisera.

   c. Construire, sur la figure recopiée sur votre copie, les images M_1' et M_2' des points M_1 et M_2.



   d. Quelle est l'image du cercle *C* privé de *O*, par la fonction *F* ?

Exercice n°3 :

A. Etude d'une fonction f .

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$f\,(x) = \ln(1 + 2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.
2. Déterminer la limite de f (x) quand x tend vers $\frac{-1}{2}$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par g(x) = f (x) – x.
   a. Etudier les variations de g sur l'intervalle I.
   b. Justifier que l'équation g(x) = 0 admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle [1; 2].
   c. En déduire le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle I.
4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;\beta[$, f (x) appartient aussi à $]0;\beta[$.

B. Etude d'une suite récurrente.

On appelle $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $]0;\beta[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

C. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 1, f\,'(x) \leq \frac{2}{3}$.
2.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel $n, \int_{u_n}^{\beta} f\,'(t)dt \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n, \beta - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leq \beta - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   c. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.