Math TSE 2011 Option S

Exercice n°1 :

Soit P la fonction polynômiale de la variable réelle x définie par :

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15.$$

1- Montrer que P(x) est factorisable par (x – 1)(x + 1).
2- Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$.
3- Tracer la courbe d'équation y = P(x) dans un repère orthonormé.
4- En déduire le tableau de variation de la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = 6x^5 - 15x^4 - 160x^3 + 30x^2 + 450x + 1$.
5- Déterminer le nombre de solution de $f(x) = y_0$, en fonction du nombre réel y_0.

Exercice n°2 :

Soient $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = e^{7i\frac{\pi}{6}}$.

1- Calculer $|z_1|$ et un argument de z_1.
2- Calculer $z_4 = z_1 (z_2)^2$ sous forme algébrique.
3- Calculer $z_5 = \dfrac{z_1}{z_3}$ sous forme algébrique.

Exercice n°3 :

Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0=1$, $v_0=2$ et les relations :

$u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n$ et $v_{n+1} = v_n + 3$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1- Déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de u_0 et v_0 respectivement.
2- Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3- Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur]-3 ; 5[par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right).$$

1- Etudier les limites de f en -3 et en 5.
2- Etudier les variations de f.
3- Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan (unité de longueur : 1 cm).

Exercice n°5 :

Soit E l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A(1,0,2), B(-1,2,1) et C(2, 1, 0).

1- Déterminer une équation du plan P passant par A, B et C.
2- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
3- Déterminer une équation de la sphère de centre B et de rayon 3.