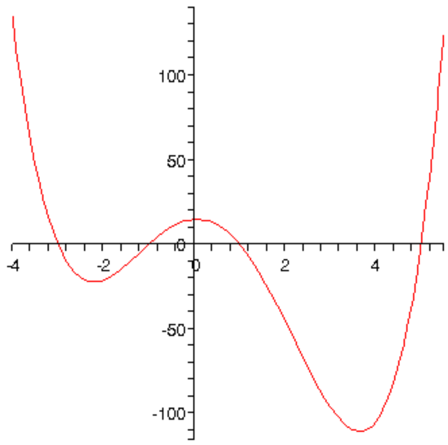
Math TSE 2011 Correction Option S

Exercice n°1 : $P(x) = x^4 – 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15$.

1- $P(1) = 0 = P(-1)$.
2- $P(x) = (x^2 – 1)(x^2 - 2x - 15) = (x – 1)(x + 1)(x + 3)(x – 5)$.
3- C : $y = P(x)$:



4- $f(x)=6x^5–15x^4–160x^3+30x^2+450x+1$ donc $f'(x)=30(x^4–2x^3-16x^2+2x+15)=30P(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		5		$+\infty$
f'			0		0		0		0		
f	$-\infty$	$\nearrow$	568	$\searrow$	-280	$\nearrow$	312	$\searrow$	-7624	$\nearrow$	$+\infty$

5- $f(x) = y_0$ admet 1 solution si $y_0 < -7624$ ou si $y_0 > 568$
$f(x) = y_0$ admet 2 solutions si $y_0 = -7624$ ou si $y_0 = 568$
$f(x) = y_0$ admet 3 solutions si $y_0 > -7624$ et si $y_0 < -280$
$f(x) = y_0$ admet 3 solutions si $y_0 > 312$ et si $y_0 < 568$
$f(x) = y_0$ admet 4 solutions si $y_0 = -280$ ou si $y_0 = 312$
$f(x) = y_0$ admet 5 solutions si $y_0 > -280$ et si $y_0 < 312$

Exercice n°2 : Soient $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = e^{7i\frac{\pi}{6}}$.

1- $|z_1|$ = 2 et arg(z_1) = $2\frac{\pi}{3}$

2- $z_4 = z_1(z_2)^2 = -9\left(\sqrt{3}+i\right)$

3- $z_5 = \dfrac{z_1}{z_3} = -2i$

Exercice n°3 :

u_0=1, v_0=2, u_{n+1} = $\frac{1}{4}$ u_n et v_{n+1} = v_n + 3, pour $n \in \mathbb{N}$.

1- u_n = $\dfrac{u_0}{4^n} = \dfrac{1}{4^n}$ et v_n = $v_0 + 3n = 2 + 3n$.

2- S_n = $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ et S'_n = $\sum_{k=0}^{n} v_k = 2(n+1) + \frac{3}{2}n(n+1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 2$.

3- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice n°4 : Soit f définie sur]-3 ; 5[par : f(x) = $\ln\left(\dfrac{5-x}{3+x}\right)$.

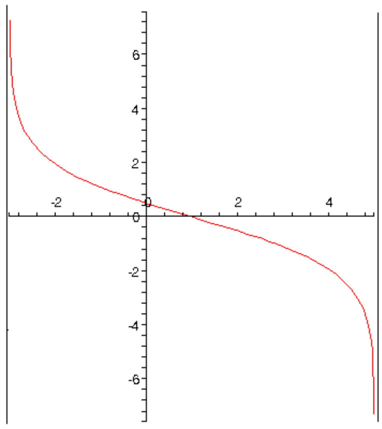
1- $\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$.

2- f ’(x) = $\dfrac{-8}{(5-x)(3+x)}$, donc :

x	-3		5
f'		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3- C, courbe représentative de f :

f(1) = ln(1) = 0



Exercice n°5 :

Soit E l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A(1,0,2), B(-1,2,1) et C(2, 1, 0).

1- P : -3x – 5y – 4z + 11 = 0.

2- (AB) : $t \mapsto \begin{vmatrix} x(t) = 1-2t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 2-t \end{vmatrix}$.

3- S(B, 3) : $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.