Math TSE 2010 Option S

Exercice n°1 :

Le but de cet exercice est l'étude des suites $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(J_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

pour tout $n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt \quad \text{et} \quad J_n=nI_n$.

1- Calculer I_0.

2- A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

3- Montrer que la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4- Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{n+1}\leq I_n\leq\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

5- En déduire la limite de la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

6- Montrer que, pour tout $t\in[0,1],\ 0\leq\sqrt{2}-\sqrt{1+t}\leq\dfrac{1-t}{2}$.

7- En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N},\ \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}-\dfrac{1}{2n^2}\leq I_n\leq\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

8- En déduire la limite de la suite $\left(J_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°2 :

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, avec $\left\|\vec{u}\right\|=4$ cm. On considère le point A_1 de P d'affixe $z_1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1- Calculer $\left|z_1\right|$ et en déduire une représentation de A_1 dans P sans calculer $\sqrt{3}$.

2- Soient le point A_0 d'affixe 1 et les points A_n d'affixes $z_n=\left(z_1\right)^n$ où n est un entier naturel non nul.

a) Calculer z_2 et représenter A_0 et A_2.

b) Calculer $\left|z_n\right|$ et en déduire que tous les points A_n sont sur un cercle C que l'on définira.

3- Démontrer que : $z_{n+1}-z_n=\left(z_1\right)^n\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4- En déduire le module de $z_{n+1}-z_n$ puis la distance A_nA_{n+1}.

5- Montrer que les triangles OA_nA_{n+1} sont équilatéraux et donner une mesure des angles $\widehat{A_nOA_{n+1}}$.

6- Montrer que $A_0 = A_6$ et représenter tous les points A_n dans P.

Exercice n°3 :

Soit E l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, avec $\left\|\vec{i}\right\|$ = 2 cm. On considère dans E le plan P : x + 2y + 2z + 3 = 0 et le point A(2, 1, 1).

1- Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan P et en déduire une paramétrisation de la droite D orthogonale à P passant par A.
2- Déterminer les coordonnées du point H intersection de P et de D.
3- Calculer la distance HA.
4- Déterminer les coordonnées du point B symétrique de A par rapport à H.
5- Soit P' le plan de E d'équation : x = 3. Déterminer les coordonnées des points C et D intersection de P, P' et de la sphère de centre H et de rayon 4.
6- Calculer les distances AC et AD.
7- Montrer que les droites (AB) et (DC) sont orthogonales.
8- Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?