Correction

Exo 1 :

1- i) $\left(w_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$, car :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{w_n}{12}$$

ii) $w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(v_1 - u_1\right) = \frac{11}{12^{n-1}}$

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

2- i) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{4}(v_n - u_n) = \frac{-1}{4}w_n \leq 0$ donc $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ est croissante et $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - v_n\right) = 0$ + (2-i) implique que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et donc convergentes.

3- $x_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 8v_n + 3u_n = x_n$ donc la suite $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ est constante.

4- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ = $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 9$ car :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_1 = 3 + 96 = 99 = 3\lim_{n\to+\infty} u_n + 8\lim_{n\to+\infty} v_n = 11\lim_{n\to+\infty} u_n$$

Exo 2 :

1- i) $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, donc P est croissante sur $]-\infty, 0[$, décroissante sur]0, 1[et croissante sur $]1, +\infty[$.

ii) P est continue, P(0)=-1 et P(1)=-2 donc l'équation P(x) = 0 admet une unique racine a.
Or P(1,6)<0 et P(1,7)>0 donc a $\in]1,6;1,7[$.

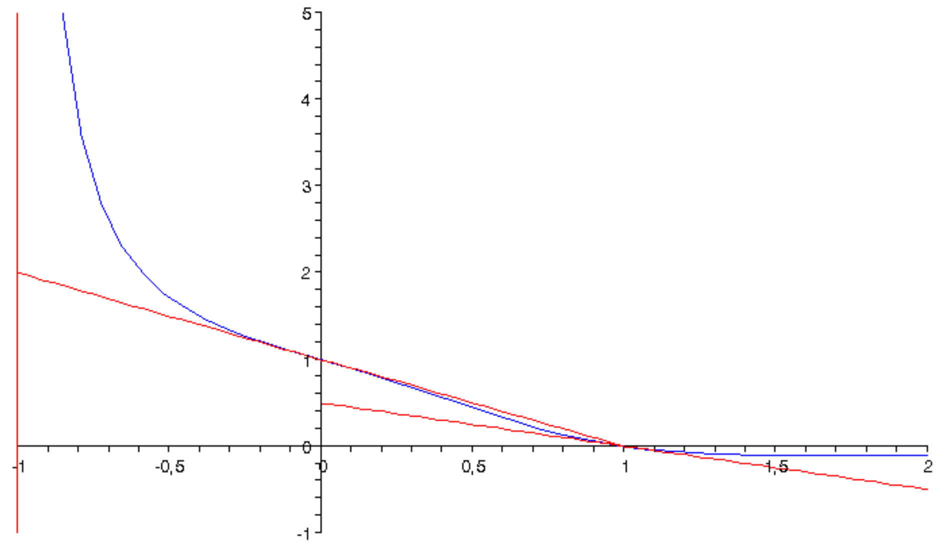
2- i) $f'(x) = \frac{P(x)}{\left(1+x^3\right)^2}$ donc f est décroissante sur]-1,a[et croissante sur $]a, +\infty[$.

ii) T_0 : y = -x + 1.

iii) $f(x) - (-x+1) = \frac{1-x}{1+x^3} + x - 1 = \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$ qui est du signe de x, donc T_0 est au dessous de C sur l'intervalle]-1 ; 0[et au dessus de C sur l'intervalle]0 ; 1[.

iv) T_1 : y = $\frac{-1}{2}(x-1)$ et $f(x) - \frac{-(x-1)}{2} = \frac{\left(x^2+x+1\right)(1-x)^2}{1+x^3} \geq 0$ donc C est au dessus de T_1.

v)



3- i) La continuité de f sur [0, x] implique l'existence de F(x) = $\int_0^x f(t)dt$.

ii) $f(x)=\dfrac{\frac{2}{3}}{x+1}+\dfrac{\frac{-2}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}$.

iii) F(1) = $\int_0^1 \frac{2}{3}\frac{1}{(t+1)}-\frac{1}{3}\frac{2t-1}{(t^2-t+1)}dt=\frac{2}{3}[\ln(t+1)]_0^1-\frac{1}{3}[\ln(t^2-t+1)]_0^1=\frac{2}{3}\ln(2)$

F(1) est l'aire comprise entre (x=0), (y=0) et C.

4- i)

$$\int_0^1 t^{3n}(1-t)dt=\int_0^1 (t^{3n}-t^{3n+1})dt=\left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}-\frac{t^{3n+2}}{3n+2}\right]_0^1=\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}=\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$

ii) $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(3k+1)(3k+2)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1(1-t)t^{3k}dt=\int_0^1(1-t)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{3k}dt$

donc $S_n=\int_0^1(1-t)\sum_{k=0}^{n}(-t^3)^k dt=\int_0^1(1-t)\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}dt$.

iii) $I-S_n=\int_0^1\left(\frac{1-t}{1+t^3}-(1-t)\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}\right)dt=\int_0^1\left(\frac{1-t}{1+t^3}(1-1+(-t^3)^{n+1}\right)dt$

donc $I-S_n=\int_0^1\left(\frac{1-t}{1+t^3}(-t^3)^{n+1}\right)dt=(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{3n}(1-t)\frac{t^3}{1+t^3}dt$.

iv) $\dfrac{t^3}{1+t^3}<1$, donc :

$$|I-S_n| \leq \int_0^1 \left((1-t)t^{3n}\right)dt \leq \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}-\frac{t^{3n+2}}{3n+2}\right]_0^1 \leq \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} \leq \frac{1}{9n^2}.$$

5- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{9^n}=0$ donc la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers $I=\dfrac{2\ln(2)}{3}$.

Exo 3 :

1- Pour z = -i les points O et M' sont confondus et pour z + i = iz $\Leftrightarrow$ z(1 – i) = -i

$\Leftrightarrow$ z = $-\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{-i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1-i}{2}$ les points M' et M'' sont confondus .

2- O, M' et M'' alignés $\Leftrightarrow$ (z+i)=a(iz) avec a réel $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z+i}{iz}$ est un nombre réel.

3- $\dfrac{z+i}{iz}=\dfrac{x+i(y+1)}{ix-y}=\dfrac{(x+i(y+1))(ix+y)}{-x^2-y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$

donc la partie imaginaire de $\dfrac{z+i}{iz}$ est $-\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$.

4- O, M' et M'' alignés $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z+i}{iz}$ est un nombre réel $\Leftrightarrow$ la partie imaginaire de $\dfrac{z+i}{iz}$ est nulle

$\Leftrightarrow -\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+y=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

Donc C est le cercle de centre $\Omega\left(0,\dfrac{-1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

5- z = $\dfrac{-1}{4}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}i$ donc z' = z + i = $\dfrac{-1}{4}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}i$ et z'' = iz = $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}-\dfrac{i}{4}$.

$z=x+iy \Rightarrow x^2+y^2+y=0 \Rightarrow M\in C$, donc :