Equations différentielles

Dans ce chapitre **K** désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE du 1ère ORDRE

a) Définitions

Définitions :

- L'équation différentielle : (L) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où a, b et c sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans **K**, est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.
- On appelle **solution** de (L) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute fonction ϕ de K^I dérivable sur I telle que : $\forall x \in I$, $a(x)\phi'(x) + b(x)\phi(x) = c(x)$

Remarques :

- On notera S_L l'ensemble des solutions de (L).
- Dans le cas particulier où c = 0, (H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$, est appelée **équation homogène**.

b) Structure des solutions

Théorème 1 :
Soit l'équation homogène (H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$ et I un intervalle où la fonction a ne s'annule pas, alors l'ensemble des solutions de (H) est :

$$S_H = \{ \phi : I \to \mathbf{K} \text{ , } \phi(x) = Ce^A \quad \text{où A est une primitive de } -\frac{b}{a} \text{ et } C \in \mathbf{K} \}$$

Théorème 2 :
La solution générale de l'équation différentielle linéaire

$$(L) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

est la somme d'une solution particulière de (L) et de la solution générale de (H)

c) Conditions initiales

Proposition 2 : $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{K}$ donnés, l'équation (L) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ admet une unique solution prenant la valeur y_0 en x_0

II. Equations linéaires du 2nd ordre (à coefficients constants)

Définition

Soient $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ et c une fonction continue de I vers **K**. On appelle solution de l'équation (L) : $y'' + ay' + by = c(x)$ toute fonction $f : I \to \mathbf{K}$ 2 fois dérivable sur I , telle que pour tout x de I : $f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x)$

a) Structure des solutions

Théorème 1 :
La solution générale de l'équation différentielle linéaire (L) : $y'' + ay' + by = c(x)$ est la somme d'une solution particulière de (L) et de la solution générale de (H) $y'' + ay' + by = 0$.

Définition :
L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de (H) .

Théorème 2 : Soient *a* et *b* complexes. *Résolution dans* $\mathbb{C}$ de (H) : y'' + ay' + by = 0 :
- si l'équation caractéristique admet 2 solutions distinctes r et s alors
$S_H = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} , f(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \}$
- si l'équation caractéristique admet 1 solution double r alors
$S_H = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} , f(x) = (Ax + B)e^{rx}, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \}$

Théorème 3 : Soient *a* et *b* réels. Résolution dans $\mathbb{R}$ de (H) : y'' + ay' + by = 0 :
- si l'équation caractéristique a des solutions réelles, on retrouve les solutions précédentes avec A, B réels
- si l'équation caractéristique a des solutions non réelles $r = \alpha + i\beta$ et $s = \alpha - i\beta$ alors les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ avec A, B réels.

b) Recherche de solutions particulières de (L) : a(x)y' + b(x)y = c(x)

Proposition : Soit (L) : y'' + ay' + by = P(x) où P polynôme de degré n.

- si $b \neq 0$ (L) admet pour solution un polynôme de degré n
- si $b = 0$ et $a \neq 0$ (L) admet pour solution un polynôme de degré n + 1
- si $b = a = 0$ (L) admet pour solution un polynôme de degré n + 2

c) Equation avec conditions initiales

Proposition : Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbf{K}$ et $z_0 \in \mathbf{K}$ donnés.
L'équation y'' + ay' + by = c(x) admet une solution unique f vérifiant :
$f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

III. Equations à variables séparables

Equations de la forme a(x) = y'b(y) :

On remarque que y'b(y) = (B(y))' où B est une primitive de b.

IV. Equations homogènes

Equations de la forme $f(\frac{y}{x}, y') = 0$.

On pose alors **y =tx** ($t : x \to t(x) = y(x)/x$).
On se ramène ainsi à une équation à variables séparables.

V. Equations aux dérivées partielles

Il n'y a pas de méthode générale de résolution de ces équations. Il convient donc de faire une étude spécifique pour chaque cas particulier.