OPERATEURS DIFFERENTIELS

Définition 1 : **Champ de vecteurs**

> Soit $U \subset \mathbb{R}^n$.
> On appelle champs de vecteurs toute application du type :
> $\vec{V} : U \to \mathbb{R}^n$
> $\quad M \mapsto \vec{V}(M)$

Définition 2 : **Gradient**

> Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et f une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$.
> On appelle gradient de f au point M le vecteur noté $\overrightarrow{grad}_M f$ qui a pour coordonnées :
> $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M)\right)_{1\le i\le n}$. On nota aussi : $\vec{\nabla}_M f \;= \overrightarrow{grad}_M f$ (Nabla f).
> On appelle opérateur gradient l'application définie par : $\overrightarrow{grad} f : \left| \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^n \\ M \mapsto \overrightarrow{grad}_M f \end{array} \right.$
> On note aussi : $\vec{\nabla} f \;= \overrightarrow{grad} f$.

Signification : $\overrightarrow{grad} f$ est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la fonction f dans l'espace.

Entre deux points très proches, distants d'une longueur δx, on mesure un écart de température δT. Au sens usuel, le gradient (de température) est justement le rapport entre ces deux grandeurs : $grad\ T = \dfrac{\delta T}{\delta x}$.

Au sens analytique (mathématique), on parle de gradient si cette grandeur admet une limite quand δx tend vers 0, limite notée : $\nabla T(x) = \dfrac{dT}{dx}(x)$.

Théorème : Soit $f \in C^1(U)$.

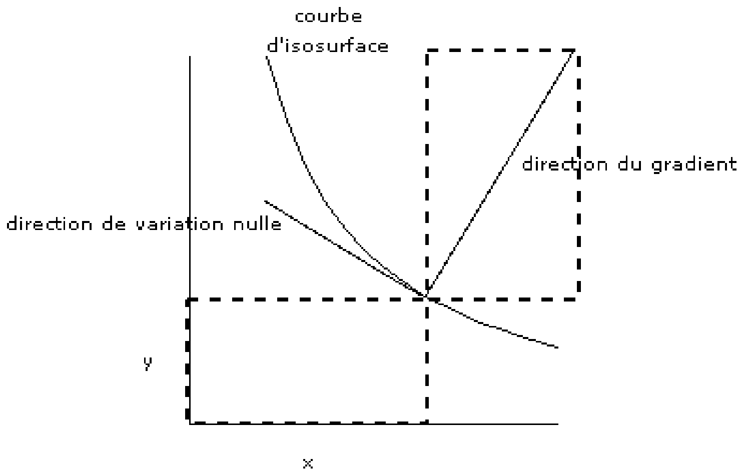
$$f\left(M+\vec{h}\right) = f(M) + \vec{h}.\overrightarrow{grad}_M f + \left\|\vec{h}\right\|\varepsilon\left(\vec{h}\right) = f(M) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(M).h_i\right) + \left\|\vec{h}\right\|\varepsilon\left(\vec{h}\right)$$

Rq : c'est le DL à l'ordre 1 de f.

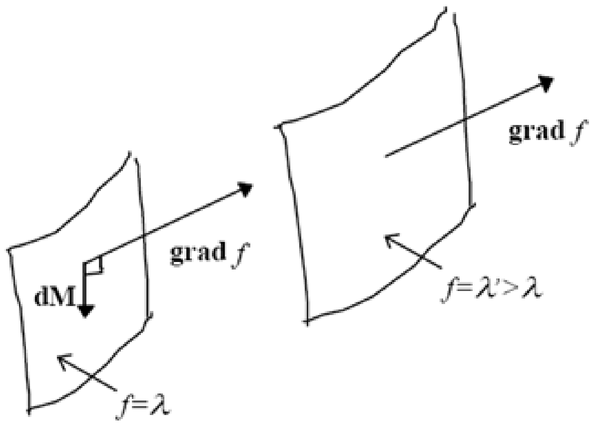
Conséquences :

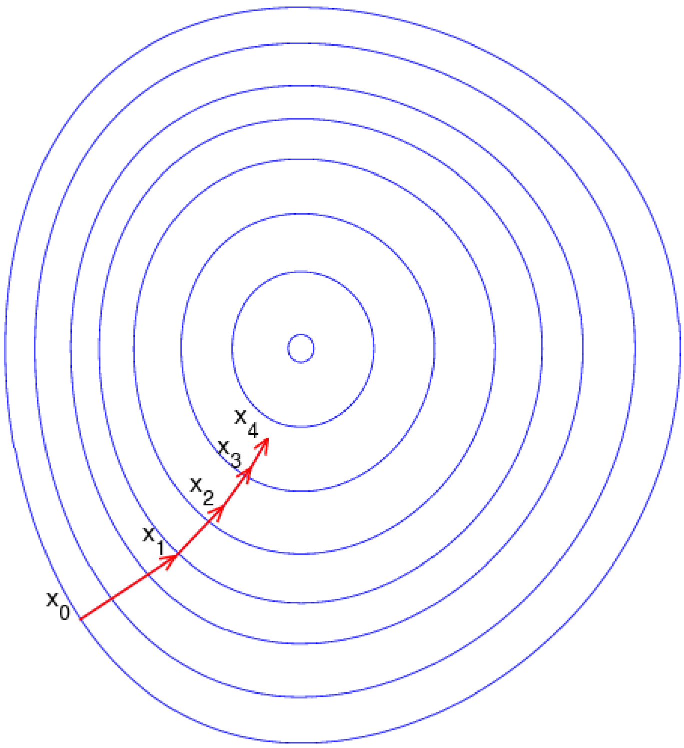
i) df = $\overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dM}$

ii) Une surface de niveau est définie par l'équation f(x, y, z) = cte. Sur une surface de niveau la fonction f est donc constante. Ainsi, pour tout déplacement élémentaire sur cette surface, la variation de f est nulle. On a donc df = grad f . dM = 0. Le vecteur $\overrightarrow{grad}f$ est donc normal aux surfaces de niveau.



iii) Lorsque l'on passe d'une surface de niveau à une surface voisine correspondant à une plus grande valeur de f (df > 0), la même relation (df = $\overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dM}$) montre que $\overrightarrow{grad}f$ est dirigé suivant les valeurs croissantes de f.





Propriété 1 :

$$\overrightarrow{grad}(fg) = f\,\overrightarrow{grad}(g) + g\,\overrightarrow{grad}(f)$$

<u>Définition 3</u> :

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\vec{V}$ un champ de vecteurs défini sur U.

On dit que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe une application différentiable f de U dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\, f$$

On dit alors que $\vec{V}$ dérive du potentiel scalaire f.

<u>Définition 4</u> : Divergence

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U.

On appelle divergence de $\vec{V}$ au point M le scalaire $div_M \vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(M)$.

On appelle opérateur divergence l'application définie par :

$$div\vec{V} : U \to \mathbb{R}$$
$$M \mapsto div_M \vec{V}$$

Rq : On note aussi : $div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}$.

Propriété 2 :

$$div\left(f\vec{V}\right) = \overrightarrow{grad}(f).\vec{V} + f.div\vec{V}$$

Définition 5 : **Laplacien**

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et f une application de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$.

On appelle laplacien de f au point M le scalaire $\Delta_M f = div_M\left(\overrightarrow{grad} f\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(M)\right)$.

Propriété 3 :

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\left(\overrightarrow{grad}(f)\right).\left(\overrightarrow{grad}(g)\right)$$

Définition 6 : **Rotationnel**

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ (n=3) et $\vec{V} \in C^1(U)$.

On appelle rotationnel de $\vec{V}$ au point M le vecteur noté $\overrightarrow{rot_M}\vec{V}$ qui a pour coordonnées : $\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}; \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}; \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)$.

On appelle opérateur rotationnel l'application définie par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\vec{V} : U &\to \mathbb{R}^3 \\ M &\mapsto \overrightarrow{rot_M}\vec{V} \end{aligned}$$

Rq : $\overrightarrow{rot}\vec{V} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & V_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & V_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & V_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & V_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & V_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & V_2 \end{vmatrix} \right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$.

Propriété 4 :

$$\overrightarrow{rot}\left(f\vec{V}\right) = f\,\overrightarrow{rot}\vec{V} + \overrightarrow{grad} f \wedge \vec{V}$$

Propriété 5 :

$$i) \quad \vec{V} \in C^2(U) \Rightarrow div\left(\overrightarrow{rot_M}\vec{V}\right) = 0$$

$$ii) \quad f \in C^2(U) \Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}_M f\right) = \vec{0}$$