F onctions à plusieurs variables réelles

1. Dérivées partielles

Définition : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

On dit que f admet une **dérivée en a suivant le vecteur h** si :

$\varphi_h : t \mapsto f(a + th)$ est dérivable en 0.

Alors $\varphi_h'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+th) - f(a))$ est appelé dérivée de f en a suivant le vecteur h.

On note $D_h f(a) = \varphi_h'(0)$.

Définition : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- On appelle **dérivée partielle** de f par rapport à la première (resp. deuxième) variable en a, si elle existe, la dérivée de f en a suivant le vecteur (1,0) (resp. (0,1)).
- On les note $D_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $D_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Remarques :

i) sous réserve d'existence, pour $a = (\alpha,\beta)$:

$$D_1 f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(\alpha + t, \beta) - f(\alpha,\beta))$$

ii) On peut généraliser ces définitions aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$.

Définition :

On appelle fonctions dérivées partielles les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ définies sur une partie de U et à valeurs dans $\mathbb{R}$**.**

2. Applications de classe C^1

Définition : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$

Si f admet des dérivées partielles **continues** sur U, alors on dit que **f est de classe C^1 sur U**.

Théorème : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U et $a = (a_1, a_2) \in U$.

Il existe une application ε de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|(h_1,h_2)\| \, \varepsilon(h_1,h_2)$$

$$\text{avec} \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0.$$

On dit que **f admet un développement limité d'ordre 1 en a.**

Définition : Soients U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur U pour tout a de U, l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) &\mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{aligned}$$

est appelée **différentielle de f en a** et notée $\mathbf{d_a f}$ ou $\mathbf{df(a)}$.

Remarque : On note souvent $dx : (h_1,h_2) \mapsto h_1$ et en omettant le point a on obtient :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Proposition : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $u,v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et g application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(t_1,t_2) = f(u(t_1,t_2),v(t_1,t_2))$.
Si f, u et v sont de classe C^1 alors g est de classe C^1 et

$$\frac{\partial g}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial t_i} \qquad i \in \{1, 2\}.$$

3. Dérivées partielles en différences finies

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \sim \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \sim \frac{f(x,y+k) - f(x,y-k)}{2k}$$

4. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Définition : Par récurrence on définit :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right) \quad k \geq 2$$

5. Isolignes

.

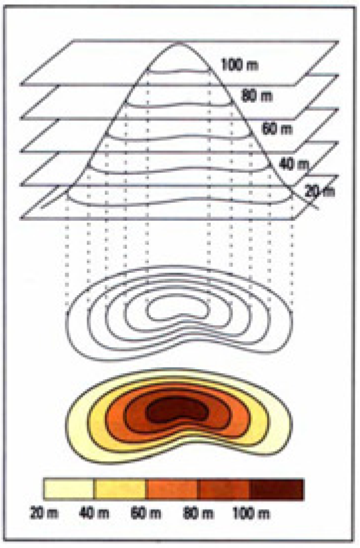
Il advient sans cesse en météorologie que l'on doive examiner à un instant donné, sur une surface incluse dans une région de l' atmosphère , les valeurs numériques ou bien d'autres caractéristiques quantifiables liées à une grandeur géométrique, physique, chimique ou biologique déterminée ; la surface envisagée peut être par exemple le relief du sol, un plan horizontal, une surface isobare , un plan de coupe verticale, etc. Pour représenter efficacement la répartition spatiale de ces valeurs ou de ces caractéristiques au moment que l'on a choisi, on trace alors sur cette surface des isolignes de la grandeur examinée, c'est-à-dire des courbes dont chacune joint les points en lesquels la valeur ou la caractéristique en question reste égale à un nombre constant (notons que les courbes ainsi tracées ne se coupent pas entre elles).

Les isolignes les plus couramment employées sont les lignes isohypses (qui ne sont généralement associées qu'à des surfaces isobares , où elles joignent les points de même altitude géopotentielle), les lignes isobares (qui joignent des points de même pression atmosphérique) et les lignes isothermes (qui joignent des points de même température de l' air) ; mais la météorologie recourt également à quantité d'autres catégories d'isolignes (pour ne citer qu'un exemple parmi une bonne vingtaine de cas, les isotaches joignent les points de même vitesse du vent). D'autre part, il faut bien remarquer que l'on désigne par ce terme non seulement les courbes que nous venons de définir, mais aussi leurs représentations planes, sur des cartes notamment, lesquelles présentent l'avantage de faire passer de l'espace tridimensionnel à un espace "manipulable" à deux dimensions, mais n'en sont pas moins distinctes, le plus souvent, des courbes dont elles se déduisent par projection (même sans tenir compte de l'échelle ni de la hauteur) : par exemple, une ligne isotherme sur une surface isobare n'est pas une courbe plane, à la différence de la "ligne isotherme" qui la représente sur une carte en lui "enlevant" la dimension verticale.

Le sens du terme "isoligne" peut être étendu aux courbes d'égale valeur d'une grandeur qui sont tracées sur un schéma ou un diagramme à deux ou trois dimensions, donc sur un plan abstrait ou sur une représentation plane en perspective (de l'espace réel ou d'un espace abstrait). Mais alors, les formes de telles isolignes deviennent complètement distinctes des formes adoptées par les isolignes relatives à une surface réelle ou à une projection plane de surface réelle, comme le montre l'exemple des réseaux d'isolignes d'un émagramme : ceux-ci déploient des isolignes de pression et de température — qui sont des droites parallèles respectivement à l'axe des abscisses et à celui des ordonnées — , des isolignes de température potentielle ou (isolignes) adiabatiques (sèches), des isolignes de thêta prime w encore appelées (isolignes) pseudoadiabatiques ou adiabatiques saturées , enfin des isolignes de rapport de mélange de saturation ; du fait que la température potentielle d'une parcelle d'air dépend uniquement de l' entropie de cette parcelle — plus précisément, elle en est une fonction croissante — , les isolignes adiabatiques non saturées sont pareillement des isolignes d'entropie et s'appellent tout aussi bien des (isolignes) isentropes , de même que les surfaces et les courbes d'égale valeur de la température potentielle, dans l'espace réel ou sur une surface réelle (ou une projection plane de surface réelle), sont de façon équivalente des surfaces et des courbes d'égale valeur de l'entropie et s'appellent des surfaces isentropes et (pour les isolignes d'entropie) des lignes isentropes .

En pratique :

Soit une surface S d'équation $z = f(x, y)$ (ou $g(x, y, z) = 0$).
On appelle isoligne toute courbe d'équation $f(x, y) = k$ (ou $g(x, y, k) = 0$) où k est une constante fixée.
Une représentation en isolignes est la projection sur le plan $z = 0$ des isolignes pour des valeurs de k variant avec un pas constant.



« Pour représenter le relief avec précision, on utilise les courbes de niveau, dites des isolignes, qui figurent les intersections imaginaires des formes du terrain avec des plans parallèles, séparées par des altitudes régulières. »

Etablir un profil topographique

Sur le tracé AB, on a placé la tranche d'un papier millimétré. Les points d'intersection des courbes avec le tracé sont reportés sur le papier et disposés ensuite en fonction de leur position après qu'on ait choisi l'échelle des hauteurs. La jonction de tous les points d'intersection constitue le profil topographique.