INTEGRATION

1. FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

1.1 Fonctions en escalier

Définition : on appelle **subdivision** d'un segment [a,b] de $\mathbb{R}$ ($a < b$) toute suite finie $s = (a_0, a_1, ..., a_n)$ de points de [a,b] vérifiant : $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Remarque : on dit que $s = (a_0, a_1, ..., a_n)$ est une subdivision régulière de [a,b] lorsque

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad , \quad k \in \{0,1,\dots,n\}.$$

Définition : Soit φ une application de [a,b] dans $\mathbb{R}$. On dit que φ est une **fonction en escalier** sur [a,b], s'il existe une subdivision $s = (a_0, a_1, ..., a_n)$ de [a,b] et $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall k \in \{0,1,...,n-1\}$, $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[$ $\varphi(x) = \lambda_k$.

1.2 Fonctions continues par morceaux

Définition : Soit f définie sur [a,b] ($a < b$), on dit que f est **continue par morceaux** sur [a,b] s'il existe une subdivision $s = (a_0, a_1, ..., a_n)$ de [a,b] telle que :
$\forall k \in \{0,1,...,n-1\}$ f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et admet une limite finie à droite en a_k et à gauche en a_{k+1}.

Théorème : Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment [a,b].
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe φ, ψ en escalier sur [a,b] telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

2. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème-définition : Soit φ une fonction en escalier sur un segment [a,b] et $s = (a_0, a_1, ..., a_n)$ une subdivision adaptée à φ telle que $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$ $\varphi(x) = \lambda_i$ $\forall i \in \{0,...,n-1\}$.
Le réel $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$ ne dépend pas de la subdivision s adaptée à φ choisie ;
ce réel est appelé **intégrale** de φ sur [a,b] et est noté :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i \quad \text{on peut aussi noter } \int_a^b \varphi \text{ ou } \int_{[a,b]} \varphi .$$

Interprétation géométrique : $\int_a^b f$ représente une somme d'aires algébriques de rectangles dans un repère orthonormé.

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème-définition : Soient f une fonction continue par morceaux sur [a,b] (a <b) ,

$\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur [a, b] ,

$E^-(f) = \{ \int_a^b \varphi \ / \ \varphi \in \mathcal{E}([a,b]), \varphi \leq f \}$ et $E^+(f) = \{ \int_a^b \varphi \ / \ \varphi \in \mathcal{E}([a,b]), \varphi \geq f \}$.

Alors $\sup(E^-(f)) = \inf(E^+(f))$ et cette valeur est appelée **intégrale de f sur [a,b].**

Remarque : l'intégrale de f sur [a,b] représente l'aire *algébrique* de la partie du plan comprise entre les droites d'équation x = a , x = b , (Ox) , (C_f) dans un repère orthonormé .

On l'obtient comme limite d'intégrales de fonctions en escalier .

P1 : (relation de Chasles) Soit f une fonction continue par morceaux sur la réunion des intervalles [a,b] et [b,c], alors :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

P2 : (linéarité) Soient f et g 2 fonctions continues par morceaux sur [a,b]. $\forall(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

P3 : (positivité) Soit f une fonction continue par morceaux [a,b] (a ≤ b).

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

P4 : (comparaison) Soient f et g 2 fonctions continues par morceaux sur [a,b] (a ≤ b) telles que f ≤ g sur [a,b]. Alors : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Corollaire : Soit f une fonction continue par morceaux sur [a,b] (a ≤ b),

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

2.3 Application au calcul d'aire

P5 : Soient f et g 2 fonctions continues sur [a,b] telles que **f ≤ g** sur [a,b] (a≤b) et D le domaine délimité par C_f, C_g et les droites d'équation x = a, x = b. Alors :

$$A(D) = \int_a^b (g(t) - f(t))dt \quad \text{(unités d'aires).}$$

3. PRIMITIVES et INTEGRALES d'une fonction continue

3.1 Primitive

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et F' = f.

Primitives usuelles :

f(x)	**F(x)**	**Remarques**
x^{α}	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$	sur un intervalle I tel que $0 \notin I$
$u'(x)/u(x)$	$\ln\lvert u(x)\rvert$	sur un intervalle I où $u(x) \neq 0$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	sur un intervalle I tel que $1 \notin I$ et $-1 \notin I$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \in \,]\pi/2 + k\pi, \pi/2+(k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$x > 0$

3.2 Primitive et intégrale

Théorème : Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

i) La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

ii) Pour toute primitive h de f sur I, $\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a)$.

Exemple : $x>0$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Application : si F est une primitive de f sur [a,b] alors :

$$\int_a^b f = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Corollaire : Soit f une fonction de classe C^1 sur I. Alors : $\forall x \in I$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

3.3 Intégration par parties

Théorème : Soient u et v 2 fonctions de **classe C^1** sur [a,b], alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

4. INTEGRALE DOUBLE

4.1 Définition, propriétés

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie sur D. On définit l'intégrale de f sur D de la même façon que dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On la note $\iint_D f(x,y)dxdy$.

Interprétation géométrique :

- Si $f \geq 0$ sur D, alors $\iint_D f(x,y)dxdy$ représente le volume de la partie E de $\mathbb{R}^3$ définie par : $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.
- $\iint_D dxdy = \mathcal{A}(D)$.

Proposition 1 : additivité

Si $D_1 \cap D_2$ est d'aire nulle alors $\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$

Proposition 2 : linéarité

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Proposition 3 : positivité et croissance

i) Si $f \geq 0$ sur D alors $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

ii) Si $f \leq g$ sur D alors $\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$.

iii) $\mathcal{A}(D) \inf_D f \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq \mathcal{A}(D) \sup_D f$.

iv) $\left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)| dxdy$.

4.2 Théorème de Fubini

Théorème : Soient a et b 2 réels ($a < b$), y_1 et y_2 2 fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $y_1 \leq y_2$ sur $[a,b]$ et D le domaine défini par :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b \text{ et } y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$.

Si f est continue sur D alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

Remarque : si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq y \leq b \text{ et } x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$ alors on a :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Corollaire : Soient a, b, c, d 4 réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, $D = [a,b] \times [c,d]$ et $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Remarque : (cas particulier) si de plus f(x,y) = u(x) v(y) avec u continue sur [a,b] et

v continue sur [c,d] alors : $$\iint_D u(x)v(y)dxdy = \left(\int_a^b u(x)dx\right)\left(\int_c^d v(y)dy\right).$$

5. INTEGRALE TRIPLE

L'étude est similaire à celle de l'intégrale double, l'intégrale triple vérifie les mêmes propriétés avec :

- $\iiint_D dxdydz$ donne le **volume** de D.
- Géométriquement : il s'agit d'un flux.

Théorème de Fubini : Soit f continue et bornée sur une partie D de $\mathbb{R}^3$.

Si D est un pavé D = [a,a']×[b,b']×[c,c'] :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^{a'}\left[\int_b^{b'}\left(\int_c^{c'} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$