

# GEOMETRIE VECTORIELLE

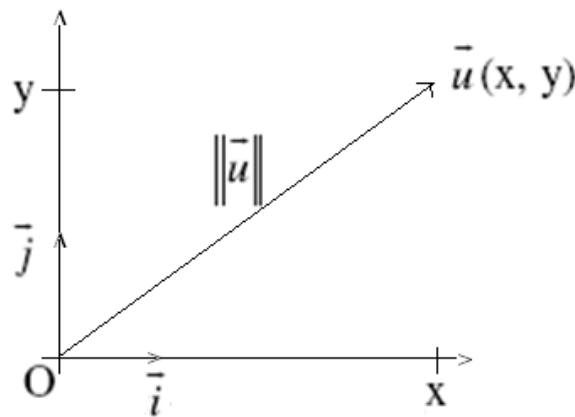
## 1. Géométrie plane

### 1-1 Vecteurs

#### Définition :

Soient le repère  $R = \{O ; \vec{i}, \vec{j}\}$  du plan et  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  un vecteur du plan.

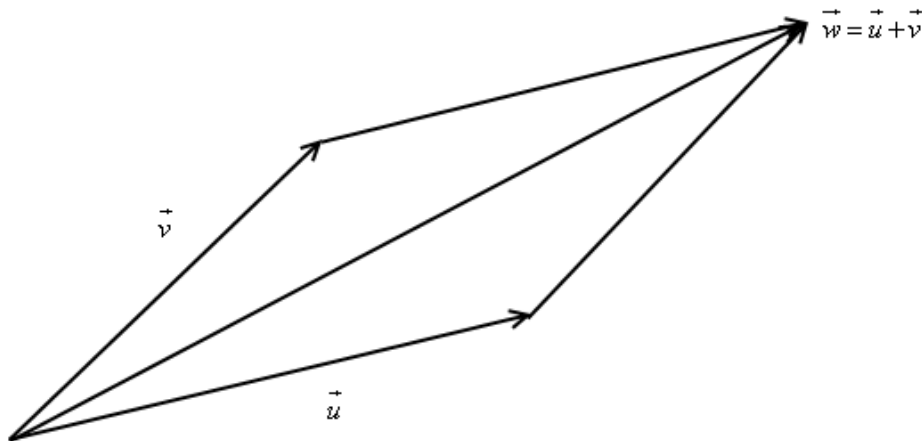
- i)  $(x, y)$  est appelé couple de coordonnées de  $\vec{u}$ .
- ii)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  est appelée norme de  $\vec{u}$ .



#### Définition :

Soient le repère  $R = \{O ; \vec{i}, \vec{j}\}$  du plan,  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs du plan et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On définit la somme de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire par :

- i)  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$ .
- ii)  $\vec{w} = \alpha\vec{u} = (\alpha x)\vec{i} + (\alpha y)\vec{j}$ .



## 1-2 Repères

### Définition :

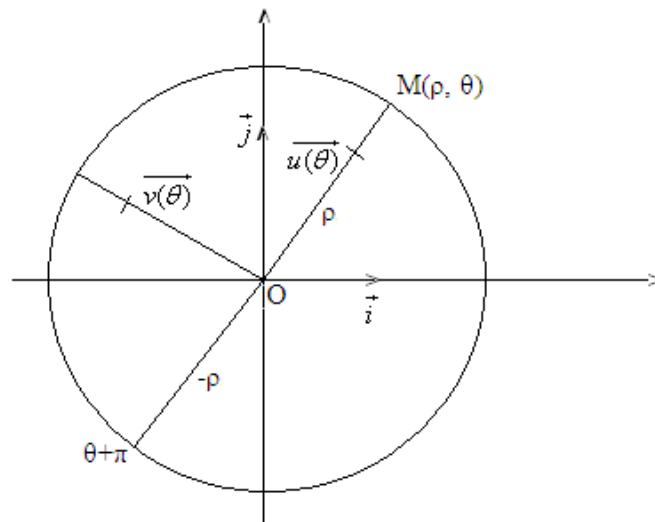
On appelle repère orthonormé direct du plan tout repère  $\{O ; \vec{i}, \vec{j}\}$  vérifiant :

- i)  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- ii)  $(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$ .

### Définition :

Soit  $\{O ; \vec{i}, \vec{j}\}$  un repère orthonormé direct du plan.

- i) On appelle repère polaire du plan tout repère  $\{O ; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\}$  où  $\theta$  est un nombre réel et
 
$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$
- ii) Le couple  $(\rho, \theta)$  tel que  $\overline{OM} = \rho \vec{u}(\theta)$  est appelé couple de coordonnées polaires du point M.



**Remarque :** il n'y a pas unicité des coordonnées polaires.

Par exemple :  $M(-\rho, \theta + \pi) = M(\rho, \theta)$ .

## 1-3 Produit scalaire

### Définition :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Propriétés 1 :**

Si  $R = \{O ; \vec{i}, \vec{j}\}$  est un repère orthonormé et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$  respectivement dans  $R$ , alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

**Propriété 2 :**

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (symétrie)
- $(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{u} \cdot \vec{w}) + b(\vec{v} \cdot \vec{w})$  (bilinéarité)
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  orthogonaux  $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**1-2 Déterminant****Définition :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. On appelle déterminant de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel noté  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v})) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Propriété :**

Si  $R = \{O ; \vec{i}, \vec{j}\}$  est un repère orthonormé direct et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$  respectivement dans  $R$ , alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

**2. Géométrie de l'espace****Remarque :**

On définit un repère orthonormé de l'espace, les coordonnées, normes, sommes et produits par un scalaire de vecteurs de l'espace comme dans le plan, avec une troisième coordonnée.

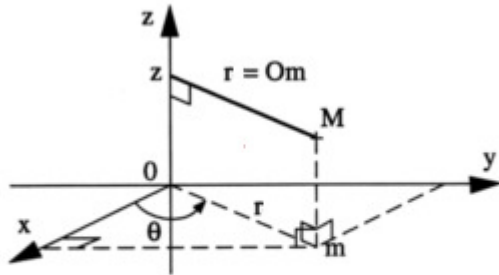
**2-1 Repères** Soit  $R = \{O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  un repère orthonormé de l'espace  $E$ .

**Définition :**

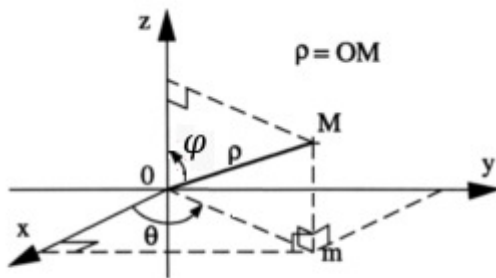
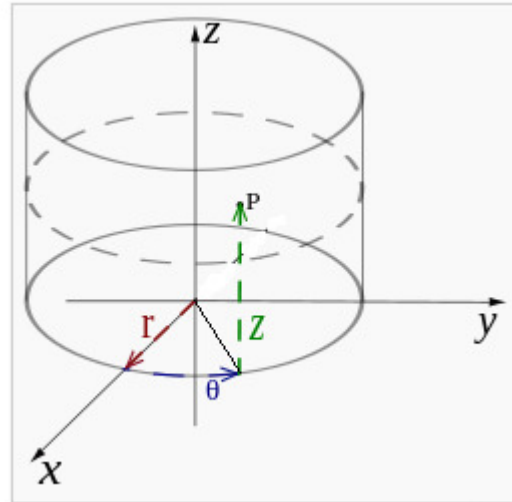
- On appelle repère cylindrique de l'espace tout repère  $\{O ; \overline{u(\theta)}, \overline{v(\theta)}, \vec{k}\}$  où  $\theta$  est un nombre réel et 
$$\begin{cases} \overline{u(\theta)} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \overline{v(\theta)} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$
- Le triplet  $(r, \theta, z)$  tel que  $\overline{OM} = r\overline{u(\theta)} + z\vec{k}$  est appelé triplet de coordonnées cylindriques du point  $M$ .

- On appelle coordonnées sphériques d'un point  $M(x, y, z)$  de l'espace le triplet

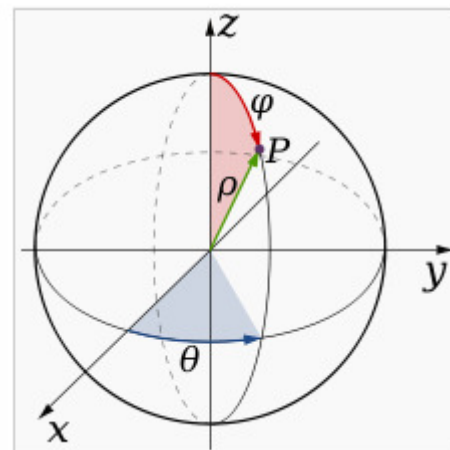
$$(\rho, \theta, \varphi) \text{ tel que : } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$



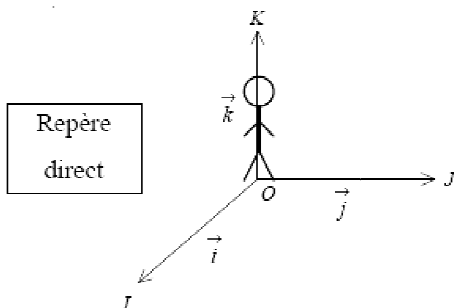
repère cylindrique



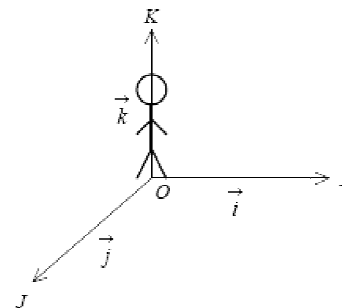
repère sphérique



**Orientation :** Nous allons distinguer deux types de repères : direct et indirect. Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe  $(O, \vec{k})$ , les pieds en  $O$  et regardant le point  $I$ . Le repère est dit "direct" si l'observateur à le point  $J$  à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.



Repère direct



Repère indirect

## 2-2 Produit scalaire

### Définition :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

### **Propriété 1 :**

Si  $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  est un repère orthonormé et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  respectivement dans  $R$ , alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' .$$

### **Propriété 2 :**

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 .$$

### **Propriétés 3 :**

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (symétrie)
- $(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{u} \cdot \vec{w}) + b(\vec{v} \cdot \vec{w})$  (bilinearité)

### **Propriété 4 :**

Si  $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  est un repère orthonormé et A et B deux points de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  respectivement dans  $R$ , alors :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} .$$

## 2-3 Produit vectoriel

### Définition :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le vecteur noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  qui a pour norme  $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$  et qui est directement orthogonal à  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

**Remarques :**

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .
- Soit  $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  un repère orthonormé de l'espace E. On a alors :  
 $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  et  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$   
 $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$  et  $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

**Propriétés 1 :**

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$  (antisymétrie)
- $(a\vec{u} + b\vec{v}) \wedge \vec{w} = a(\vec{u} \wedge \vec{w}) + b(\vec{v} \wedge \vec{w})$  (bilinearité)

**Propriété 2 :**

Si  $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  est un repère orthonormé direct et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  respectivement dans R, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$