GEOMETRIE VECTORIELLE

1. Géométrie plane

1-1 Vecteurs

Définition :

Soient le repère R = {O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } du plan et $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur du plan.

i) (x, y) est appelé couple de coordonnées de $\vec{u}$.

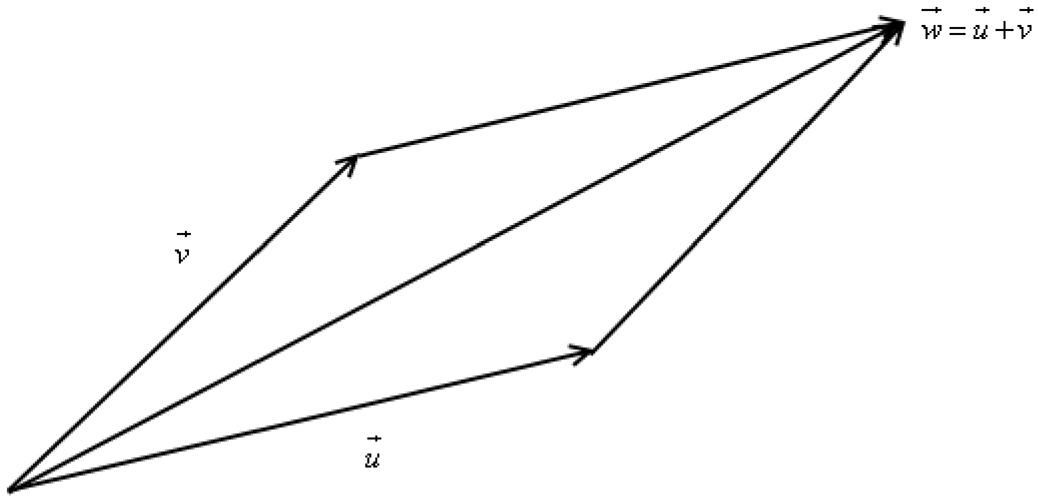
ii) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelée norme de $\vec{u}$.

Définition :

Soient le repère R = {O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } du plan, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la somme de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire par :

i) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$.

ii) $\vec{w} = \alpha\vec{u} = (\alpha x)\vec{i} + (\alpha y)\vec{j}$.



1-2 Repères

Définition :

On appelle repère orthonormé direct du plan tout repère {O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } vérifiant :

i) $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

ii) $(\vec{i}, \vec{j}) = +\dfrac{\pi}{2}$.

Définition :

Soit {O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } un repère orthonormé direct du plan.

i) On appelle repère polaire du plan tout repère {O ; $\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}$ } où θ est un nombre réel et $\begin{cases} \overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{v(\theta)} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$.

ii) Le couple (ρ, θ) tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u(\theta)}$ est appelé couple de coordonnées polaires du point M.

Remarque : il n'y a pas unicité des coordonnées polaires.
Par exemple : M(-ρ, θ+π) = M(ρ, θ).

1-3 Produit scalaire

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Propriétés 1 :

Si R={O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } est un repère orthonormé et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') respectivement dans R, alors : $\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy'.

Propriété 2 :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)
- $\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right).\vec{w} = a\left(\vec{u}.\vec{w}\right)+b\left(\vec{v}.\vec{w}\right)$ (bilinéarité)
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux ⇔ $\vec{u}.\vec{v}$ = 0.

1-2 Déterminant

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté det($\vec{u}, \vec{v}$) défini par :

$$\det\left(\vec{u}.\vec{v}\right) = \begin{cases} \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Propriété :

Si R={O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } est un repère orthonormé direct et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') respectivement dans R, alors :

det($\vec{u}$, $\vec{v}$) = xy' – x'y = $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

2. Géométrie de l'espace

Remarque :

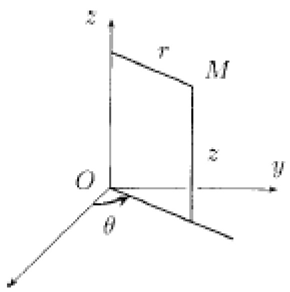
On définit un repère orthonormé de l'espace, les coordonnées, normes, sommes et produits par un scalaire de vecteurs de l'espace comme dans le plan, avec une troisième coordonnée.

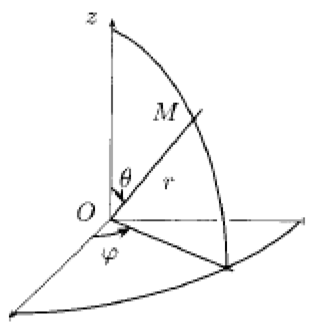
2-1 Repères

Soit R={O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ } un repère orthonormé de l'espace E.

Définition :

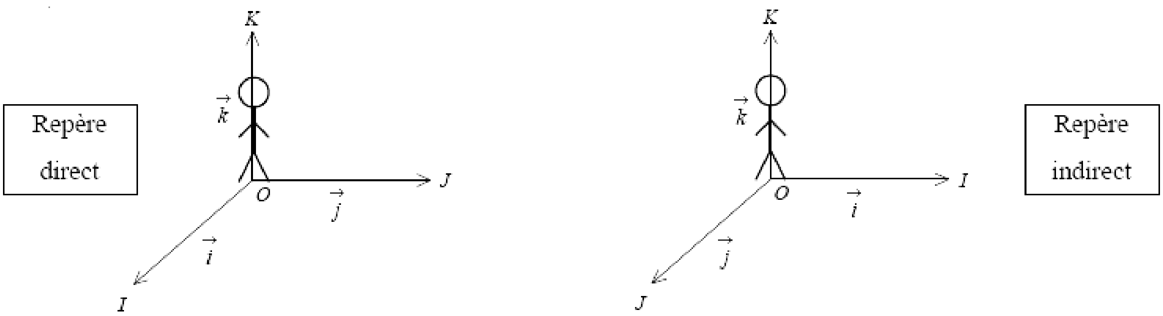
- On appelle repère cylindrique de l'espace tout repère {O ; $\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}, \vec{k}$ } où θ est un nombre réel et $\begin{cases} \overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{v(\theta)} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$.
- Le triplet (ρ, θ, z) tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u(\theta)} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées cylindriques du point M.
- On appelle coordonnées sphériques d'un point M(x, y, z) de l'espace le triplet (r,θ,φ) tel que : $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$.





Orientation :

Nous allons distinguer deux types de repères : direct et indirect. Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I. Le repère est dit "direct" si l'observateur à le point J à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.



2-2 Produit scalaire

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Propriété 1 :

Si R=$\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est un repère orthonormé et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') respectivement dans R, alors : $\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy' + zz'.

Propriété 2 :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{v}$ = 0.

Propriétés 3 :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)
- $\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right).\vec{w} = a\left(\vec{u}.\vec{w}\right)+b\left(\vec{v}.\vec{w}\right)$ (bilinéarité)

Propriété 4 :

Si R={O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ } est un repère orthonormé et A et B deux points de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') respectivement dans R, alors :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\ .$$

2-3 Produit vectoriel

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui a pour norme $\left|\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$ et qui est directement orthogonal à ($\vec{u}, \vec{v}$).

Remarques :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Soit R={O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ } un repère orthonormé de l'espace E. On a alors : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
  $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$ et $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

Propriétés 1 :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$ (antisymétrie)
- $\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right)\wedge\vec{w} = a\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+b\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$ (bilinéarité)

Propriété 2 :

Si R={O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ } est un repère orthonormé direct et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') respectivement dans R, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}\,.$$