Dérivation et fonctions usuelles

I. Dérivée

Définition : Soit f définie sur un domaine D contenant un intervalle [a, b] et telle que f est définie au voisinage de a.

On appelle **taux de variation de f sur [a, b]** la valeur $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On appelle **dérivée de f en a** la valeur, quand elle existe, $f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On appelle **dérivée seconde de f en a** la valeur, quand elle existe, $f''(a) = \lim_{b \to a} \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}$.

On peut ainsi, quand c'est possible définir les dérivées à tous ordres avec : $f^{(k)}(a) = (f^{(k-1)})'(a)$.

Remarques :

i) On a également $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ii) $(x^n)' = nx^{n-1}$

iii) La dérivée mesure la pente de la courbe en x = a. L'équation de la tangente à la courbe en a est : y = f'(a).(x – a) + f(a).

iv) Si x = f(t) correspond à une équation de mouvement, alors f'(t) sera la vitesse de déplacement, le taux de variation sera la vitesse moyenne et la dérivées seconde l'accélération.

Proposition :

Soient f et g dérivables en a.

(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)

(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)

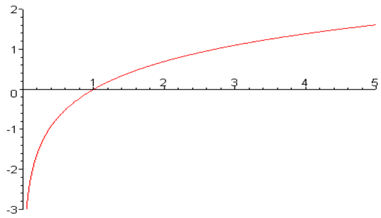
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\left(g(a)\right)^2}$$

(f(u(a)))' = u'(a).f'(u(a))

II. Fonctions usuelles

1. Fonction ln

Définition : on appelle logarithme népérien et on note ln la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$



Propriétés :

- la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R}_+^* , \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b}$
- $x > 0, y > 0, \quad \ln\frac{1}{x} = -\ln x \quad , \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $n \in \mathbb{Z}$, $\ln x^n = n \ln x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- u étant une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I,

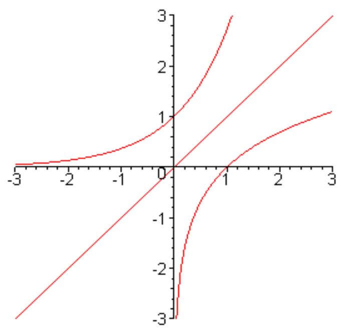
  ln|u| est dérivable sur I et $\boxed{(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}}$

2. Fonction exp

Définition :

La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ donc établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et admet une bijection réciproque définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ appelée ***fonction exponentielle*** et notée ***exp*** :

$$\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$



Remarque :

En notant e le réel exp(1) on obtient : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$ ($e \cong 2{,}718$).
Par convention on note alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.
exp est appelée fonction exponentielle de base e.

Propriétés :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp'(x) = e^x$.
- exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

3. Fonctions circulaires

Définition :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan orienté usuel et C le cercle de centre O et de rayon 1. Soient M un point de C et $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ en radians. On appelle **cosinus** du réel x l'abscisse de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et **sinus** de ce réel l'ordonnée de M.
On définit ainsi deux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ notées cos et sin**.**

Propriétés :

- $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$
- Les fonctions sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

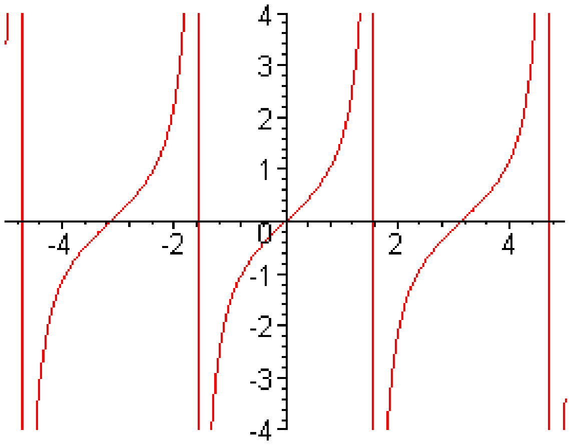
Définition :

La fonction **tangente** est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

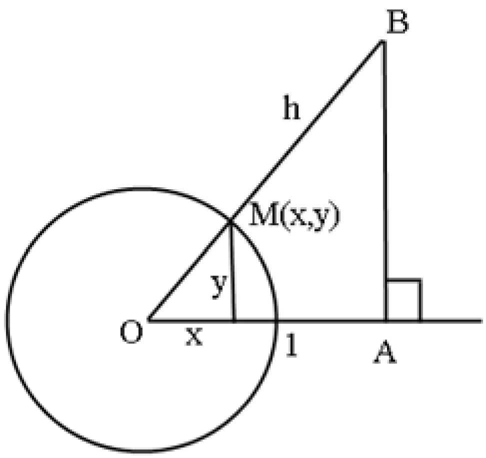
Propriétés :

- tan est impaire, π-périodique.
- tan est continue et dérivable sur tout intervalle où elle est définie.
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Représentation graphique :



Remarque :



Soient OAB un triangle rectangle en A et $\alpha = \widehat{AOB}$.
Soit M(x, y) sur C(O, 1) tel que x = cos α et y = sin α.

Thm de Talles : $\dfrac{OA}{x} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{AB}{y} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha = \dfrac{OA}{h} \\ y = \sin\alpha = \dfrac{AB}{h} \\ \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{AB}{OA} \end{cases}$

D'où la formule magique : **soh cah toa**.

III. Développement limité

Définition : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V d'un point a.

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ on dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a et on note **f = o$_a$(g).**

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ on dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a et on note **f** $\underset{a}{\sim}$ **g.**

Exemple :

au voisinage de ∞ : si n > p alors $x^p = o(x^n)$

au voisinage de 0 : si n > p alors $x^n = o(x^p)$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

Exemples usuels

Au voisinage de 0 :	$\sin x \sim x$	$\tan x \sim x$	$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$
	$\ln(1+x) \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	

Si $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_m x^m$ avec $n \geq m$ $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$,

alors : $P(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$ et $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$.

Définition : (DL au voisinage de a à l'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in \overset{o}{I}$, $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que f admet un **développement limité au voisinage de a à l'ordre n**, que l'on le note $DL_n(a)$, si :

Pour tout x voisin de a ,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \ldots + \alpha_n (x-a)^n + o((x-a)^n) \text{ avec } (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

L'expression: $\alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \ldots + \alpha_n (x-a)^n$ s'appelle partie régulière du $DL_n(a)$ de f.

Théorème de Taylor-Young :

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in \overset{o}{I}$ et $f \in \mathbb{R}^I$ / $f \in C^n(I)$. Alors f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o\left((x-a)^n\right).$$

Application : DL$_n$(0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} ... + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

IV. **Différences finies**

On utilise souvent, quand on ne peut pas les calculer, les approximations suivantes :

$f'(x) \sim \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$: formule décentrée à droite.

$f'(x) \sim \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$: formule décentrée à gauche.

$f'(x) \sim \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$: formule centrée.

$f''(x) \sim \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$: formule centrée d’ordre 2.