I- Soit Σ la nappe géométrique admettant la paramétrisation suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to E \\ (u,v) \mapsto M(u,v)\left(x = u+v ; y = u^2+v^2 ; z = u^2 - v^2\right) \end{array} \right.$$

i) Montrer que Σ n'est pas injective.

ii) Chercher l'ensemble des points réguliers de Σ.

iii) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier $M(u_0, v_0)$ quelconque de Σ.

II- Soit Σ la nappe géométrique admettant la paramétrisation suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\times [-\pi,\pi] \to E \\ (\theta,\varphi) \mapsto \left| \begin{array}{l} x = a(1+\cos\varphi) \\ y = a\tan\theta(1+\cos\varphi) \\ z = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos\theta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{où } a>0.$$

i) Déterminer les points réguliers de Σ.

ii) Déterminer les points de Σ en lesquels le plan tangent contient le point $P\left(2a, \frac{2}{\sqrt{3}}a, 0\right)$.

III- Déterminer sur le cylindre $y^2 = 2pz$ un arc de classe C^1 tel que la tangente en tout point rencontre la parabole Q d'équations :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2qz \end{cases} \quad \textit{avec } 0 < p < q.$$

IV- Déterminer, sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (a réel quelconque), les courbes coupant sous un angle constant α donné les cercles méridiens (dans les plans contenant 0z).

V- Déterminer les trajectoires orthogonales de la famille des courbes $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^*}$ d'équation cartésienne : $x^2 - y^2 + \lambda y = 0$.

T.S.V.P.

VI- Soit la surface S de paramétrisation :

$$x = \cos(u) - v.\sin(u)\ ,\ \ y = \sin(u) + v.\cos(u)\ ,\ \ z = u(u + 2v).$$

Montrer que S est développable.

VII- Montrer que la surface S de paramétrisation : $x = 3u + v$, $y = 2u^2 + 2uv$, $z = u^3v$ est développable et préciser l'arête de rebroussement.

VIII- Montrer que la surface S de paramétrisation : $x = \dfrac{uv}{u+v}$, $y = u^3 + v^3$, $z = u^2 + v^2$ est réglée mais non développable (on pourra poser $a=u+v$ et $b=u^2+v^2$).

IX- Montrer que la surface S : $x^2 z^2 - (x^2 + y^2) = 0$ est réglée mais non développable.

X- Former une équation cartésienne du cylindre circonscrit à S : $x^2 + y^2 = z$ suivant la direction de la droite $x = y = z$.