

GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE

1. Espace affine euclidien

Soit \mathcal{E} espace affine euclidien : espace affine associé à un e.v. E euclidien

- $\mathcal{R}(O, \mathcal{E})$ repère orthonormé (ou orthonormal) de \mathcal{E} ssi \mathcal{E} b.o.n. de E
- \mathcal{E} est orienté ssi E est orienté
- Changement de repère orthonormé : $X = A + PX'$ (P matrice orthogonale)
en dimension 2 : $x = a + x' \cos \theta - y' \sin \theta$
 $y = b + x' \sin \theta + y' \cos \theta$
- L'application $d : (A, B) \mapsto \|\overrightarrow{AB}\|$ est appelée distance euclidienne.

$$\text{Dans le repère } \mathcal{R} : d(M, M')^2 = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2$$

Dim $E = 3$

- Equation d'un plan $P : ax + by + cz + d = 0$ où $\vec{n}(a, b, c)$ vecteur orthogonal à P .
- $d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- Si P_1 et P_2 sécants, alors $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ vecteur directeur de $D = P_1 \cap P_2$
- Si $\Delta =$ droite (A, \vec{u}) , alors $d(M_0, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Dim $E = 2$

- Equation d'une droite $D : ax + by + c = 0$ où $\vec{n}(a, b)$ vecteur orthogonal à D .
 Si $\vec{n}(\cos \alpha, \sin \alpha)$, alors $D : x \cos \alpha + y \sin \alpha + h = 0$ équation normale de D
- p projection orthogonale sur $D = A + F$ s.e.a. de direction F : p projection sur D parallèlement à F^\perp
- s symétrie orthogonale par rapport à $D = A + F$: s symétrie par rapport à D parallèlement à F^\perp ($s = 2p - \text{Id}_E$)
Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée réflexion
- H hyperplan médiateur de (A, B) ($A \neq B$) est l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que $d(M, A) = d(M, B)$.
 H est l'hyperplan passant par I milieu de $[A, B]$ de direction $(\overrightarrow{AB})^\perp$
- Si $A \neq B$, alors il existe une unique réflexion s tel que $s(A) = B$.

2. Isométries affines

- $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ isométrie si et seulement si f bijection affine qui conserve la distance :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, d(M', N') = d(M, N) \quad \text{où } M' = f(M) \text{ et } N' = f(N)$$

- f isométrie si et seulement si f application affine d'endomorphisme associé $\varphi \in \mathcal{O}(E)$
 - si $\varphi \in \mathcal{O}^+(E)$, on dit que f est un déplacement
 - si $\varphi \in \mathcal{O}^-(E)$, on dit que f est un antidéplacement

Remarque : une réflexion est un antidéplacement

- f isométrie si et seulement si $f = t \circ g$ avec t translation et g isométrie laissant un point invariant.
- La composée de 2 déplacements est un déplacement.

Déplacements du plan (dim $E = 2$) Soit f un déplacement.

Si $\text{Inv}(f) = \emptyset$ alors f est une translation.

Si $\text{Inv}(f) \neq \emptyset$ alors f est appelée rotation.

De plus si $f \neq \text{Id}_{\mathcal{E}}$ alors f admet un unique point invariant A et $f = R_{(A, \theta)}$ où θ angle de la rotation vectorielle associée.

Déplacements de l'espace (dim $E = 3$)

Soit f un déplacement d'endomorphisme associé φ .

Si $\text{Inv}(f) \neq \emptyset$ alors f est appelée **rotation**

De plus si $f \neq \text{Id}_{\mathcal{E}}$ alors $\text{Inv}(f)$ est une droite $D(\vec{u})$ appelée axe de la rotation et f est la rotation d'axe $D(\vec{u})$ et d'angle celui de φ .

Si $\text{Inv}(f) = \emptyset$: - si $\varphi = \text{Id}_E$ alors f est une translation.

- si $\varphi \neq \text{Id}_E$ alors $f = t \circ R$ où R est la rotation d'axe D et d'angle θ et t la translation de vecteur $\vec{u} \in D = \text{vect}(\vec{v})$.

On dit que f est un **vissage** d'axe D et de vecteur \vec{u} .

Méthode d'obtention de D , θ et \vec{u} pour un vissage :

On commence par déterminer l'angle θ et l'axe $\text{vect}(\vec{v})$ de la rotation vectorielle φ .

On détermine ensuite $D = \{M / \overline{MM'} \text{ colinéaire à } \vec{v}\} = A + \text{vect}(\vec{v})$ puis $\vec{u} = \overline{AA'}$.

Antidéplacements de l'espace (dim E = 3)

Soit f un antidéplacement d'endomorphisme associé φ .

Si $\text{Inv}(f) = P$: plan affine, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à P .

Si $\text{Inv}(f) = \emptyset$ alors f est appelée **symétrie glissée**.

C'est la composée d'une symétrie orthogonale affine par rapport à un plan P et d'une translation de vecteur \vec{u} .

Méthode d'obtention de P et \vec{u} pour une symétrie glissée :

On commence par déterminer $\text{Inv}(\varphi) = \overline{P}$.

On détermine ensuite $P = \{M / \overline{MM'} \in \overline{P}\} = A + \text{vect}(\vec{v}, \vec{w})$

puis $\vec{u} = \overline{AA'}$.

Si $\text{Inv}(f) = \{\Omega\}$: - si $\varphi = -\text{Id}_E$ alors f est la symétrie centrale par rapport à Ω .

- si $\varphi \neq -\text{Id}_E$ alors f est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à P et d'une rotation d'axe D et d'angle θ avec $P \cap D = \{\Omega\}$.

Classification des isométries suivant la dimension de l'ensemble des points invariants :

Soient f une isométrie et $A = \text{Inv}(f)$

dim $E = 2$: * si dim $A = 2$ alors $f = \text{Id}_E$

* si dim $A = 1$ alors f réflexion d'axe A

* si dim $A = 0$ alors f rotation de centre A ($A = \{A\}$)

dim $E = 3$: * si dim $A = 3$ alors $f = \text{Id}_E$

* si dim $A = 2$ alors f réflexion de plan A

* si dim $A = 1$ alors f rotation d'axe A

* si dim $A = 0$ alors $f = S_P \circ R_D$ ($P \perp D$)

déplacement

antidéplacement

déplacement

antidéplacement

Remarque : Soit S_A la symétrie centrale de centre A d'endomorphisme associé $\varphi = -\text{Id}_E$

- si dim $E = 2$ alors S_A est un déplacement : $S_A = R_{(A, \pi)}$

- si dim $E = 3$ alors S_A est un antidéplacement : $S_A = S_P \circ R_{(D, \pi)}$

où $P \perp D$ et $\{A\} = P \cap D$.