GEOMETRIE AFFINE

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, de dimension $n \leq 3$

1. ESPACES AFFINES

1.1 Définitions

Définition : On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont appelés points est un **espace affine** de direction l'espace vectoriel E (ou sur E) s'il existe une application $\varphi : \mathcal{E}^2 \to E$ telle que :

i) $\forall (A,B,C)\in\mathcal{E}^3,\ \varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$

ii) $\forall A\in\mathcal{E},\ \forall \vec{v}\in E,\ \exists! M\in\mathcal{E},\ \varphi(A,M) = \vec{v}$

Remarques :

- $\varphi(A,B)$ est noté $\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
- $\forall A\in\mathcal{E},\ \theta_A : M \mapsto \overrightarrow{AM}$ bijection de $\mathcal{E}$ sur E.
- La dimension de E est appelée dimension de $\mathcal{E}$.

- Tout espace vectoriel est un espace affine sur lui même.
- Tout espace affine sur E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à E *(par le choix d'une origine).*
- On pourra identifier les notations de points et de vecteurs
  (petites ou grandes lettres pour les points, avec ou sans flèche pour les vecteurs)
  ou encore noter B - A pour $\overrightarrow{AB}$ ($b - a = \vec{ab}$) et $B = A + \vec{v}$ pour $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$

1.2 Translations

Définition : Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur E et $\vec{v}\in E$. On appelle **translation** de vecteur $\vec{v}$ l'application : $t : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ /\ M \mapsto M + \vec{v}$

Remarques :

- On note $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.
- F sev de E, $A\in\mathcal{E}$, on note $A + F = \{A + \vec{v},\ \vec{v}\in F\}$.

Proposition 1 : $(\mathrm{T}(\mathcal{E}),\circ)$ est un groupe isomorphe à (E,+).

1.3 Sous espaces affines

$\mathcal{E}$ espace affine de direction E.

Définition : On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est un **sous espace affine** de $\mathcal{E}$ si :

$\mathcal{A} = \varnothing$ ou il existe un sev F de E et $A\in\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{A} = A + F = \{M,\ \overrightarrow{AM}\in F\}$

Remarques :

- F est appelé direction de $\mathcal{A}$ et on note $\mathcal{A} = (A,F)$.
- $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ s.e.a. de $\mathcal{E}$ ssi $\forall A \in \mathcal{A}$, $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{A}\}$ est un sev de E
  et F est alors la direction de $\mathcal{A}$.

<u>1.4 Intersection, parallélisme</u>

Proposition 2 : Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ deux s.e.a. non vides de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{A} = (A, F)$ et $\mathcal{A}' = (B, F')$.
Alors :

i) $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F + F'$
ii) si $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$ alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ est un s.e.a. de direction $F \cap F'$

Définition : Soient $\mathcal{A} = (A, F)$ et $\mathcal{A}' = (B, F')$ deux s.e.a. de $\mathcal{E}$.

On dit que $\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{A}'$ lorsque $F \subset F'$
On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont parallèles si $F = F'$

Remarque : par convention $\emptyset$ est parallèle à tout s.e.a.

Proposition 3 : si $\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{A}'$ alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \emptyset$ ou $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$

<u>2. REPERES CARTESIENS</u>

Définition :

- On appelle repère cartésien d'un espace affine $\mathcal{E}$, tout couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où $O \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ est une base de la direction E .
- On appelle coordonnées dans $\mathcal{R}$ de $M \in \mathcal{E}$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Changement de repère :

Soient $\mathcal{R} = (O,\mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (O',\mathcal{B}')$ 2 repères de $\mathcal{E}$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, Ω la matrice colonne des coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$ et X , X' les matrices colonnes des coordonnées d'un point M de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$. Alors :

$$\boxed{X = \Omega + PX'}$$

<u>3. BARYCENTRES</u>

Théorème-définition : (*fonction vectorielle de Leibniz)*

Soient $(A_i,\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de points pondérés ($A_i \in \mathcal{E}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$) et $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

et $f : \mathcal{E} \to E$, $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Si $\alpha = 0$ alors f est une application constante .
Si $\alpha \neq 0$ alors f est une bijection et il existe un unique point G tel que :

$f(G) = \vec{0}$, G est appelé **barycentre** de $(A_i,\alpha_i)_{1 \le i \le n}$
et on note $G = Bar((A_i,\alpha_i),1 \le i \le n)$.

Remarque : si $\alpha \neq 0$, G est caractérisé par : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Proposition 4 : $G = Bar((A_i,\alpha_i),1 \le i \le n) \Rightarrow \alpha \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$, $\forall O \in \mathcal{E}$.

Définition : L'**isobarycentre** (ou centre de gravité) d'un système de points est le barycentre de ces points affectés de coefficients égaux.

Remarque : l'isobarycentre de 2 points est leur milieu.

Proposition 5 : associativité du barycentre.
Soient $G = Bar((A_i,\alpha_i),1 \le i \le n)$ et $\{I, J\}$ une partition de $\{1, \cdots, n\}$.
Si $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ et $\sum_{i \in J} \alpha_i \neq 0$ alors en notant $G_1=Bar((A_i,\alpha_i),i \in I)$, $G_2=Bar((A_i,\alpha_i),i \in J)$
on a $G = Bar\left((G_1, \sum_{i \in I} \alpha_i) , (G_2, \sum_{i \in J} \alpha_i) \right)$

Proposition 6 :
i) Etant donnés n points $(A_1, \cdots, A_n)$ d'un sous espace affine $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$, tout barycentre de ces n points est dans $\mathcal{A}$.
ii) Etant donnés n points $(A_1, \cdots, A_n)$ d'un espace affine $\mathcal{E}$, l'ensemble des barycentres de ces n points est un sous espace affine de $\mathcal{E}$.

Remarque : En particulier une droite affine est l'ensemble des barycentres de 2 de ses points.

Définition : Soient A et B 2 points de $\mathcal{E}$. Le segment [A,B] est l'ensemble des barycentres de : $((A, \alpha), (B, \beta))$ avec $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

Remarque : en prenant $\alpha+\beta=1$, on obtient $[A,B] = \{M \in \mathcal{E},\ \alpha \overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB} = \vec{0},\ \alpha \in [0,1]\}$.

4. DROITE et PLAN AFFINE

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n (n = 2 ou n = 3), $\mathcal{R}$ $(O,\mathcal{B})$ repère de $\mathcal{E}$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ base de E (E ev associé à $\mathcal{E}$)

4.1 Droite affine

Une droite affine D est un sous espace affine de dimension 1 : D = (A,F) avec dimF = 1

- D est déterminée par un point et un vecteur directeur (vecteur non nul) : $D = (A, \vec{u})$
  ou par 2 points distincts de D : D = (AB)

- **Représentation paramétrique** de D = (A, $\vec{u}$)   A(x_0,y_0,z_0), $\vec{u}$(a,b,c) dans $\mathcal{R}$

$$M(x,y,z)\in D \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \quad \lambda\in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

- Toute **droite du plan** a une équation cartésienne de la forme

$$ux + vy + w = 0 \quad (u,v)\neq(0,0)$$

4.2 Plan affine

Un plan affine P est un sous espace affine de dimension 2 : P = (A, F) avec dimF = 2

- P est déterminée par un point et 2 vecteurs directeurs non colinéaires P = (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$)
  ou   par 3 points non alignés P = (A, B, C)
- **Représentation paramétrique** de P = (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) où A(x_0,y_0,z_0), $\vec{u}$(a,b,c) et $\vec{v}$(a',b',c') dans $\mathcal{R}$:

$$M(x,y,z)\in P \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \quad (\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

- Tout plan a une équation cartésienne de la forme :

$$ux + vy + wz + h = 0 \;/\; (u,v,w)\neq(0,0,0).$$

Remarque : Une droite est définie par 2 plans sécants :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + h_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + h_2 = 0 \end{cases}$$ représente une droite si au moins des 3 déterminants suivants n'ést pas nul : $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$

5. APPLICATIONS AFFINES

Définition : Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ 2 espaces affines de directions E et E'.

Une application f : $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est dite **affine** s'il existe O$\in\mathcal{E}$ et $\varphi\in\mathcal{L}$(E,E') tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})}$$

avec O' = f(O) et   M' = f(M).

Remarque : si f est affine l'application linéaire φ ne dépend pas du point O :

$\forall A\in\mathcal{E}$, $\overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$ φ est appelée partie linéaire de f (parfois notée *lin*(f))

Propriétés :   Soit f une application affine de $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ d'application linéaire associée φ :

1- f est déterminée par la donnée d'un couple de points (A,A') tel que f(A) = A'
et de sa partie linéaire φ

2- expression analytique : $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \iff$ X' = AX + Y où   A = $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (φ) , X , X', Y matrices colonnes des coordonnées de M, M',O' dans $\mathcal{R}$ (O,B) et $\mathcal{R}'$(Ω,B')

3- f est bijective ssi φ est bijective (de même pour injective, surjective). Une bijection affine de $\mathcal{E}$ dans lui même est appelé isomorphisme affine ou transformation affine

4- l'image par f d'un s.e.a de $\mathcal{E}$ est un s.e.a. de $\mathcal{E}'$

5- l'image réciproque d'un s.e.a de $\mathcal{E}'$ est un s.e.a de $\mathcal{E}$

6- $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, $g : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ affines de parties linéaires respectives φ, ψ
gof est une application affine de partie linéaire $\psi o \varphi$

7- l'ensemble des bijections affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est un groupe pour la loi o
appelé groupe affine de $\mathcal{E}$

8- f conserve : le barycentre , l'alignement , le parallélisme
[si $G = Bar((A_i,\lambda_i) 1 \le i \le n)$ alors $f(G) = Bar((f(A_i),\lambda_i)\ 1 \le i \le n)$]

9- l'ensemble des points invariants par f est un s.e.a de $\mathcal{E}$ de direction Inv(φ)

6. EXEMPLES d'APPLICATIONS AFFINES

6.1 Translations

Définition : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur E, $\vec{v} \in E$, on appelle **translation** de vecteur $\vec{v}$

l'application : $t : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

$M \mapsto M + \vec{v}$

Remarque : On note $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.

Propriétés :

1- Toute translation t de vecteur $\vec{u}$ est une bijection affine d'endomorphisme associé Id_E (si $\vec{u} \neq \vec{0}$ t n'a pas de points invariants).

2- Toute application affine dont l'endomorphisme associé est Id_E est une translation.

3- ($\mathcal{T}$, o) groupe commutatif isomorphe à (E ,+).

4- Expression analytique dans un espace de dimension 3 de repère $\mathcal{R}$:

Si $\vec{u}(a,b,c)$ et M(x,y,z), alors : M'(x',y',z') / $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

6.2 Homothéties affines

Définition : On appelle homothétie de centre $A \in \mathcal{E}$ et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ l'application

$H_{(A,\alpha)} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

$M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{AM'} = \alpha \overrightarrow{AM}$

Remarques :

- On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties
- A, M, M' sont alignés
- Si $\alpha \neq 1$, A est le seul point invariant par $H_{(A,\alpha)}$
- $H_{(A,-1)} = S_A$ (symétrie de centre A)

Propriétés : Soient $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

1- $H_{(A,\alpha)}$ est une bijection affine de partie linéaire l'homothétie vectorielle h_α.

2- Toute application affine dont la partie linéaire est l'homothétie vectorielle h_α ($\alpha \neq 1$) est une homothétie affine de rapport α.

3- Soit $\mathcal{H}_A$ l'ensemble des homothéties de centre A. $(\mathcal{H}_A, o)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

4- Expression analytique dans un espace de dimension 3 de repère $\mathcal{R}$

Si $A(x_0,y_0,z_0)$ et $M(x,y,z)$, alors : $M'(x',y',z')$ / $\begin{cases} x' = x_0 + \alpha(x - x_0) \\ y' = y_0 + \alpha(y - y_0) \\ z' = z_0 + \alpha(z - z_0) \end{cases}$

5- Soit $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ l'ensemble des homothéties translations. $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}, o)$ est un groupe (en général non commutatif).

6.3 Projections affines

Définition : On appelle **projection affine** de $\mathcal{E}$ toute application affine

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ telle que } \mathbf{fof = f}$$

Théorème : une application affine f est une projection si et seulement si son endomorphisme associé φ est une projection vectorielle et f admet au moins un point invariant.

Remarques :

- Soit A un point invariant par une projection affine f, alors $\text{Inv}(f) = \mathcal{A}(A, \text{Inv}(\varphi))$.
  On dit que f est la projection sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $F = \text{Ker}(\varphi)$.
  $M' = f(M)$ est le point d'intersection de Inv(f) et du s.e.a $\mathcal{A}(M, \text{Ker}(\varphi))$

  $$M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \in \text{Ker}(\varphi) \\ M' \in \text{Inv}(f) \end{cases} \quad (\textit{d'où l'expression analytique de f})$$

- Dans un espace de dimension 3 on obtient :

  si $\text{Inv}(f) = \mathcal{E}$ alors $F = \text{Ker}(\varphi) = \{\vec{0}\}$ $f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$

  si Inv(f) = P (plan) alors $F = \vec{D}$ $(\vec{D} \not\subset \vec{P})$ f projection sur P parallèlement à $\vec{D}$

  si Inv(f) = D (droite) alors $F = \vec{P}$ $(\vec{D} \not\subset \vec{P})$ f projection sur D parallèlement à $\vec{P}$

  si Inv(f) = {A} alors F = E $f : M \mapsto A$ application constante

6.4 Symétries affines

Définition : On appelle **symétrie affine** de $\mathcal{E}$ toute application affine

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ telle que } \mathbf{fof = Id}_{\mathcal{E}}$$

Théorème :

1) Une application affine f est une symétrie si et seulement si son endomorphisme associé φ est une symétrie vectorielle et f admet au moins un point invariant.

2) s symétrie affine ssi $p = \frac{1}{2}(s + Id_{\mathcal{E}})$ projection affine.

Remarques :

- Soit A un point invariant par une symétrie affine f.
  Alors Inv(f) = $\mathcal{A}$ (A,Inv(φ)) et on dit que f est la symétrie par rapport à $\mathcal{A}$ parallèlement à la direction F de φ.
- $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} I \quad \text{milieu de } [MM'], \quad I \in Inv(f) \\ \overrightarrow{MM'} \in F \end{cases}$
- Dans un espace de dimension 3 on obtient :

  si Inv(f) = $\mathcal{E}$ alors F = $\{\vec{0}\}$ f = $Id_{\mathcal{E}}$
  si Inv(f) = P (plan) alors F = $\vec{D}$ $(\vec{D} \not\subset \vec{P})$ f symétrie / P parallèlement à $\vec{D}$
  si Inv(f) = D (droite) alors F = $\vec{P}$ $(\vec{D} \not\subset \vec{P})$ f symétrie / D parallèlement à $\vec{P}$
  si Inv(f) = {A} alors F = E f = S_A symétrie centrale

6.5 Affinités

Définition : Soient E_1, E_2 2 sev supplémentaires de E ev associé à $\mathcal{E}$, A$\in\mathcal{E}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
On appelle **affinité** de base $\mathcal{A}$ = (A,E_1) ,de direction E_2 et de rapport λ , l'application

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad M \mapsto M' \quad \text{tel que } \overrightarrow{M_1M'} = \lambda \overrightarrow{M_1M}$$

avec M_1 projeté de M sur $\mathcal{A}$ parallèlement à E_2

Remarques :

- Si λ = 0 alors aff($\mathcal{A}$, E_2, λ) = p projection sur $\mathcal{A}$ parallèlement à E_2.
- Si λ = 1 alors aff($\mathcal{A}$, E_2, λ) = $Id_{\mathcal{E}}$.
- Si λ = -1 alors aff($\mathcal{A}$, E_2, λ) = s symétrie par rapport à $\mathcal{A}$ parallèlement à E_2.

Propriétés :

1- f affinité ssi $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ et p projection de $\mathcal{E}$ tels que : $f = \lambda Id_{\mathcal{E}} + (1 - \lambda)p$
2- si $\lambda \neq 0$, f = aff($\mathcal{A}$, E_2, λ) est bijective et f^{-1} =aff($\mathcal{A}$, E_2, $1/\lambda$)
3- si f = aff($\mathcal{A}$, E_2, λ) alors Inv(f) = $\mathcal{A}$