

CONIQUES

Soit E un plan euclidien.

1. Généralités

Définition 1 : Soient F un point de E , D une droite ne contenant pas F et $e \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle conique l'ensemble Γ des points M du plan tels que le rapport des distances $\frac{d(M, F)}{d(M, D)} = e$. F se nomme le **foyer**, D la **directrice** et e l'**excentricité**.

La perpendiculaire Δ menée de F à D est appelé **axe focal** de Γ .

Propriétés :

- i) Il existe un repère orthonormal dans lequel la conique Γ a pour équation cartésienne : (1) $x^2 + y^2 = e^2(x - \alpha)^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ii) Δ est un axe de symétrie de Γ .

Définition 2 : On distingue trois cas :

- i) $0 < e < 1$: Γ est appelée **ellipse**.
- ii) $e = 1$: Γ est appelée **parabole**.
- iii) $e > 1$: Γ est appelée **hyperbole**.

2. Equation cartésienne d'une conique

On cherche les points communs à la conique Γ et à l'axe Δ en posant $y = 0$ dans (1). On obtient : $e^2(x - \alpha)^2 - x^2 = 0$.

2.1 Parabole : Soit $e = 1$.

L'équation (2) est alors du premier degré, il existe un seul point s dans $\Gamma \cap \Delta$.

La conique est une **parabole**. L'équation (1) devient $y^2 = -2\alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Le point $s\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ se nomme le sommet de la parabole.

En effectuant le changement de repère suivant : $\begin{cases} X = x - \frac{\alpha}{2} \\ Y = y \end{cases}$, l'équation de la parabole devient

$Y^2 = -2pX$, où l'on a posé $p = \alpha$ (p est le paramètre de la parabole).

2.2 Ellipse : Soit $0 < e < 1$.**Théorème 1** : Il existe un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel Γ a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (0 < b < a).$$

Réciproquement, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$, est une ellipse de foyer
 $F = O + c \cdot \vec{i} \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2})$, de directrice $D : x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.
Remarques :

1. Dans le cas $0 < a < b$, on permute les lettres x et y .
2. Le point O est le centre de symétrie.
3. Γ admet deux foyers $F = O + c \cdot \vec{i}$ et $F' = O - c \cdot \vec{i}$, et deux directrices associées :

$$D : x = \frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad D' : x = -\frac{a^2}{c}.$$
4. Les axes Ox et Oy sont des axes de symétrie de Γ .
 $Ox = FF'$ s'appelle **l'axe focal de l'ellipse**.
5. Les intersections avec les axes s'appellent les **sommets de Γ** . $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ sont respectivement les longueurs du grand et du petit axe.

2.3 Hyperbole : Soit $e > 1$.**Théorème 2** : Il existe un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel Γ a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > 0, b > 0).$$

Réciproquement, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$, est une hyperbole de foyer
 $F = O + c \cdot \vec{i} \quad (c = \sqrt{a^2 + b^2})$, de directrice $D : x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.
Remarques :

1. Dans le cas $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, on permute les lettres x et y .
2. Le point O est le centre de symétrie.
3. Γ admet deux foyers $F = O + c \cdot \vec{i}$ et $F' = O - c \cdot \vec{i}$, et deux directrices associées :

$$D : x = \frac{a^2}{c}, \quad \text{et} \quad D' : x = -\frac{a^2}{c}.$$
4. Les axes Ox et Oy sont des axes de symétrie de Γ .
 $Ox = (FF')$ s'appelle **l'axe focal de l'hyperbole**.
5. Les intersections avec les axes s'appellent les **sommets de Γ** .
6. L'hyperbole admet deux asymptotes : $\Delta : y = \frac{b}{a}x$ et $\Delta' : y = -\frac{b}{a}x$.

Théorème 3 :

Soit Γ une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites Δ et Δ' .

Soient \vec{u} et \vec{u}' deux vecteurs directeurs respectifs de D et D' .

L'hyperbole Γ a pour équation, dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{u}')$, $XY = k$, où k est un réel non nul.

Définition 3:

L'hyperbole est dite **équilatère** lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires.

3. Etude bifocale**Théorème 4 :**

Soient F et F' deux points distincts tels que $FF' = 2c$, et $0 < c < a$.

L'ensemble Γ des points M du plan vérifiant : $MF + MF' = 2a$ est une ellipse de foyers F et F' .

Théorème 5 :

Soient F et F' deux points distincts tels que $FF' = 2c$, et $0 < a < c$.

L'ensemble Γ des points M du plan vérifiant : $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole de foyers F et F' .

4. Représentation paramétrique des coniques

Le plan E est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Théorème 6 : Soit \mathcal{P} la parabole d'équation : $y^2 = 2px$.

Un paramétrage de \mathcal{P} est : $t \mapsto M = O + p \frac{t^2}{2} \vec{i} + pt \vec{j} / t \in \mathbb{R}$.

Théorème 7 : Soit \mathcal{E} l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Un paramétrage de \mathcal{E} est : $t \mapsto M = O + a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j} / t \in [0; 2\pi]$.

Théorème 8 : Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Un paramétrage de \mathcal{H} est : $t \mapsto M = O + a \cosh t \vec{i} + b \sinh t \vec{j} / t \in \mathbb{R}$.

Résumé :

Conique $\Gamma = \{ M / \text{distances } \frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e \}$

F se nomme le **foyer**, D la **directrice** et e l'**excentricité**.

La perpendiculaire menée de F à D est appelé **axe focal** de Γ .

Parabole	α	e	F	D
$Y^2 = -2pX$	p	1	$F\left(\frac{-\alpha}{2}, 0\right)$	$X = \frac{\alpha}{2}$
$X^2 = -2pY$	p	1	$F\left(0, \frac{-\alpha}{2}\right)$	$Y = \frac{\alpha}{2}$

Ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	c	e	F	D
$0 < b < a$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{c}{a}$	$F(c ; 0)$	$x = \frac{a^2}{c}$
$0 < a < b$	$\sqrt{b^2 - a^2}$	$\frac{c}{b}$	$F(0 ; c)$	$y = \frac{b^2}{c}$

Hyperbole	c	e	F	D	Δ
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{c}{a}$	$F(-c ; 0)$	$x = \frac{-a^2}{c}$	$y = \pm \frac{b}{a}x$
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{c}{b}$	$F(0 ; -c)$	$y = \frac{-b^2}{c}$	$x = \pm \frac{a}{b}y$