COURBES en POLAIRES

1. DEFINITION et RAPPELS

Soient $\mathcal{A}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 2 et $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct (R.O.N.D.) de $\mathcal{A}$.

Rappels : A tout point M, distinct de O, on associe un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ de la droite (OM) et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $\theta = (\vec{i},\vec{u})$ et $\rho \in \mathbb{R}$ avec $\overline{OM} = \rho$.

On a donc :

- $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}$ avec $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$
- $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

(ρ, θ) est appelé **système de coordonnées polaires** de M , dans le repère polaire.

O est le pôle, $(O, \vec{i})$ l'axe polaire et θ l'angle polaire.

Remarques :

- O est défini par la relation $\rho = 0$.
- On note : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta+\pi/2)$
- Il n'y a pas unicité du couple (ρ,θ) : pour tout $k \in \mathbb{Z}$ les couples $(\rho, \theta + 2k\pi)$ et $(-\rho, \theta + \pi + 2k\pi)$ désignent le même point.
- On a $x^2 + y^2 = \rho^2$ et $\dfrac{y}{x} = \tan\theta$

Définition : Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Une relation **$\rho = f(\theta)$** entre les coordonnées polaires définit une courbe paramétrique $C = (D,\varphi)$ avec $\varphi : \theta \mapsto (x, y)$ où : $\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$

Avec les notations précédentes : $\varphi(\theta) = f(\theta)\,\vec{u}(\theta)$

On dit que l'on a ainsi définit la **courbe C en polaires** avec :

$$M(\theta) \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$$

2. ETUDE D'UNE COURBE EN POLAIRE

2.1 Réduction du domaine d'étude Soit $\rho = f(\theta)$ pour $\theta \in D$

- Si $\forall\theta \in D$, $f(\theta + 2n\pi) = f(\theta)$: l'étude sur un intervalle d'amplitude $2n\pi$ suffit (la courbe est décrite en entier).
- Si $\forall\theta \in D$, $f(\theta + \pi) = f(\theta)$: O centre de symétrie de C , l'étude sur $[a, a + \pi]$ suffit.
- Si $\forall\theta \in D$, $f(\theta + \pi) = -f(\theta)$: l'étude sur un intervalle d'amplitude π suffit (la courbe est décrite en entier) .
- Si $\forall\theta \in D$, $f(-\theta) = f(\theta)$: $(O, \vec{i})$ axe de symétrie de C, l'étude sur $\mathbb{R}_+$ suffit.
- Si $\forall\theta \in D$, $f(-\theta) = -f(\theta)$: $(O, \vec{j})$ axe de symétrie de C, l'étude sur $\mathbb{R}_+$ suffit.

- Si $\forall\theta\in D$, $f(\pi-\theta) = f(\theta)$: $(O, \vec{j})$ axe de symétrie de C, l'étude sur $[\pi/2, +\infty[$ suffit.
- Si T période de f / $T \neq 2n\pi$: $M'(\theta + T)$ se déduit de $M(\theta)$ par rotation de centre O et d'angle T, l'étude sur [a, a + T] suffit et on complète par des rotations R(O,T).
- Si T antipériode de f : $\forall\theta\in D$, $f(\theta + T) = -f(\theta)$ / $T \neq \pi$, l'étude sur [a, a + T] suffit et on complète par des rotations $R(O,T + \pi)$.
- Si : $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ / $\forall\theta\in D$, $f(\alpha-\theta) = f(\theta)$ alors $M'(\alpha-\theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à la droite δ d'angle polaire $\alpha/2$, l'étude sur $[\alpha/2, +\infty[$ suffit.
- Si : $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ / $\forall\theta\in D$, $f(\alpha-\theta) = -f(\theta)$ alors $M'(\alpha-\theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à la droite δ d'angle polaire $(\alpha + \pi)/2$, l'étude sur $[\alpha/2,+\infty[$ suffit.

2.2 Tangentes

Soit C : $\rho = f(\theta)$ où f fonction de classe C^1 sur D.

Proposition :

i) La **tangente** en un point autre que O a pour vecteur directeur

$$\mathbf{f'(\theta)\vec{u}(\theta)+f(\theta)\vec{v}(\theta).}$$

ii) **En O** la tangente est la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{u}(\theta)$.

Remarque : O est le seul point stationnaire possible.

2.3 Variations

- Les variations de f ($\rho = f(\theta)$) donnent les variations de l'éloignement de $M(\theta)$ par rapport à O.
- Si $f'(\theta) = 0$ et f admet un extrémum en θ alors la tangente en ce point est perpendiculaire à la droite d'angle polaire θ , (c'est la tangente au cercle qui a cet extremum pour rayon) .
- Le signe de ρ et les valeurs de θ pour lesquelles $\rho = 0$ sont très importants.

2.4 Branches infinies

1°) cas : $\lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta) = \pm\infty$ **:** C présente une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $\theta = \theta_0$.

Dans le repère $(O,\vec{u}(\theta_0),\vec{v}(\theta_0))$, $M(\theta)$ a pour coordonnées $(f(\theta)\cos(\theta-\theta_0) , f(\theta)\sin(\theta-\theta_0))$

- si $\lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta)\sin(\theta-\theta_0) = a$ la droite d'équation Y= a dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ est asymptote
- si $\lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta)\sin(\theta-\theta_0) = \infty$, C admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'angle polaire θ_0.

2°) cas : $\lim_{\theta\to+\infty} f(\theta) = \pm\infty$ ou $\lim_{\theta\to-\infty} f(\theta) = \pm\infty$ **,** on dit que C admet une branche infinie en spirale

3°) cas : $\lim_{\theta\to+\infty} f(\theta) = a$ ou $\lim_{\theta\to-\infty} f(\theta) = a$

on dit que le cercle de centre O et de rayon $|a|$ est un cercle asymptote

2.5 Points doubles

On les obtient en résolvant les équations :

$$f(\theta + 2k\pi) = f(\theta) \quad \text{et} \quad f(\theta + (2k+1)\pi) = - f(\theta)$$