

COURBES PARAMETRIQUES du plan

1. NOTION DE COURBE

Une courbe est une partie de \mathbb{R}^2 qui est l'ensemble des valeurs prises par une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^2 .

Une courbe peut être définie par :

- Une équation de la forme $y = f(x)$ (pour un x un seul y).
- Une équation de la forme $f(x,y) = 0$.
- Une représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in D \subset \mathbb{R}.$$
- Une équation polaire $\rho = f(\theta)$ avec
$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}.$$

2. COURBES PARAMETRIQUES

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension 2 de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2.1 Définitions

- On appelle courbe paramétrique de \mathcal{A} tout couple $C = (D, \varphi)$ où D est un ouvert non vide de \mathbb{R} et φ une application de classe C^1 définie sur D à valeurs dans \mathcal{A} .
- On note $M(t) = \varphi(t)$ et $\vec{V}(t) = \vec{OM}(t)$
- On dit que $A \in C$ est un point de multiplicité n si $\text{card}(\varphi^{-1}(A)) = n$: point simple si $n = 1$, point double si $n = 2$, etc.
- On dit que $M = \varphi(t)$ est un point **stationnaire** (ou singulier) si $\varphi'(t) = \vec{0}$.
On dit que $M = \varphi(t)$ est un point **régulier** si $\varphi'(t) \neq \vec{0}$.
- On dit que C est **régulière** lorsque tout point de C est régulier.
- On dit que $C = (D, \varphi)$ est de classe C^k ($k \geq 1$) si φ est de classe C^k sur D .

2.2 Tangentes

Définition : Soient (D, φ) une courbe paramétrique et $M_0(t_0)$ ($t_0 \in D$) un point de la courbe.

S'il existe un vecteur directeur de la droite $(M_0M(t))$ qui admet un vecteur limite $\vec{u}(t_0)$ non nul quand t tend vers t_0 , la droite T passant par M_0 de vecteur directeur $\vec{u}(t_0)$ est appelée **tangente** à C en (M_0, t_0) .

Théorème : Soient (D, φ) une courbe paramétrique et $M_0(t_0)$ ($t_0 \in D$) un point de la courbe.

- Si $\varphi'(t_0) \neq \vec{0}$ alors $\varphi'(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente en (M_0, t_0) .
- Si $\varphi'(t_0) = \vec{0}$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^{(n)}(t_0) \neq \vec{0}$ alors un vecteur directeur de la tangente T en (M_0, t_0) est $\varphi^{(p)}(t_0)$ où p est le plus petit des entiers i tels que $\varphi^{(i)}(t_0) \neq \vec{0}$.

Remarque : Dans la suite on suppose que cette condition est réalisée

(i.e. il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^{(n)}(t_0) \neq \vec{0}$).

Proposition : Soient $C = (D, \varphi)$ et $\varphi = (f, g)$ telle que f' ne s'annule pas au voisinage de t_0 .

- Si $\lim_{t_0} \frac{g'}{f'} = L$ ($L \in \mathbb{R}$) L est le coefficient directeur de la tangente en (M_0, t_0) .
- Si $\lim_{t_0} \frac{g'}{f'} = \pm\infty$ la tangente en (M_0, t_0) est la droite (M_0, \vec{j}) .

2.3 Position de la courbe par rapport à la tangente

Soit $C = (D, \varphi)$ une courbe paramétrique avec φ de classe C^k sur D ($k \geq 2$).

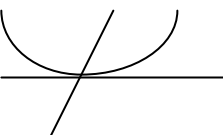

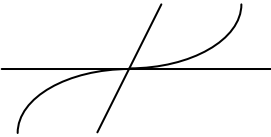
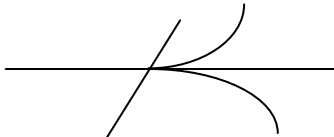
On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^{(m)}(t_0)$ soit non nul.

Soit p le plus petit des entiers vérifiant cette propriété.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\varphi^{(p)}(t_0), \varphi^{(n)}(t_0))$ soit une famille libre.

Soit q le plus petit des entiers n vérifiant cette propriété.

On note : $\vec{V}_1 = \varphi^{(p)}(t_0)$ et $\vec{V}_2 = \varphi^{(q)}(t_0)$.

	p impair	p pair
q pair	 point ordinaire	 rebroussement de 2 ^{ème} espèce
q impair	 point d'inflexion	 rebroussement de 1 ^{ère} espèce

Remarque : un point est dit **birégulier** lorsque $p = 1$ et $q = 2$.

2.4 Branches infinies

Définition : Soit $C = (D, \varphi)$ avec $\varphi = (f, g)$ une courbe paramétrique. On dit que C présente une branche infinie quand $t \rightarrow t_0$ si : $\|\vec{OM}(t)\| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow t_0$.

Remarque : Cela revient à dire qu'une au moins une des coordonnées tend vers l'infini en t_0 .

1^o) cas : $\begin{cases} \lim_{t_0} f = \pm\infty \\ \lim_{t_0} g = y_0 \end{cases}$ la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à C .

2^o) cas : $\begin{cases} \lim_{t_0} f = x_0 \\ \lim_{t_0} g = \pm\infty \end{cases}$ la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à C .

3°) cas : $\begin{cases} \lim_{t_0} f = \pm\infty \\ \lim_{t_0} g = \pm\infty \end{cases}$ on étudie alors la limite de $\frac{g}{f}$ en t_0 .

- Si $\lim_{t_0} \frac{g}{f} = 0$ alors C admet une branche parabolique de direction (Ox).
- Si $\lim_{t_0} \frac{g}{f} = \pm\infty$ alors C admet une branche parabolique de direction (Oy).
- Si $\lim_{t_0} \frac{g}{f} = a \in \mathbb{R}^*$ alors C a une direction asymptotique de coefficient directeur a :
 - i) si $\lim_{t_0} (g - af) = \pm\infty$ C admet une branche parabolique dans la direction de $\Delta : y = ax$.
 - ii) si $\lim_{t_0} (g - af) = b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C.

Remarques :

- On précise la position de la courbe C par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de $g(t) - af(t) - b$.
- L'étude des branches infinies peut souvent se faire à partir des développements limités généralisés de f et g au voisinage de t_0 .