GEOMETRIE ELEMENTAIRE

1. Géométrie plane

1-1 Repères

Rappel : On appelle repère orthonormé direct du plan tout repère {O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } où $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

avec ($\vec{i}, \vec{j}$)= $+\frac{\pi}{2}$.

Propriété : Soient R={O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } et R'={O' ; $\vec{i}', \vec{j}'$ } deux repères orthonormaux directs tels que : $\begin{cases} \vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j} \end{cases}$ (où a=cosθ, b=sinθ, c=-sinθ et d=cosθ) et $\overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.

Alors si un point M du plan a pour coordonnées (x, y) dans R et (x', y') dans R', on a :
x = α + ax' + cy' et y = β + bx' + dy'.

Définition : Soit {O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } un repère orthonormé direct du plan.

i) On appelle repère polaire du plan tout repère {O ; $\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}$ } où θ est un nombre réel et $\begin{cases} \overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{v(\theta)} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$.

ii) (ρ, θ) tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u(\theta)}$ est appelé couple de coordonnées polaires de M.

Remarque : il n'y a pas unicité des coordonnées polaires. Par ex. : M(-ρ, θ+π) = M(ρ, θ).

1-2 Produit scalaire

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Propriétés 1 : Si R={O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } est un repère orthonormé et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') respectivement dans R, alors : $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = xx' + yy'.

Propriété 2 :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$ (symétrie)
- $\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right).\vec{w} = a\left(\vec{u}.\vec{w}\right) + b\left(\vec{v}.\vec{w}\right)$ (bilinéarité)

1-3 Déterminant

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté det($\vec{u}, \vec{v}$) défini par : $\det\left(\vec{u}.\vec{v}\right) = \begin{cases} \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Propriété 1 : Si R={O ; $\vec{i}, \vec{j}$ } est un repère orthonormé direct et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') respectivement dans R, alors : det($\vec{u}, \vec{v}$) = xy' – x'y = $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Propriétés 2 :

- det($\vec{u}, \vec{v}$) = - det($\vec{v}, \vec{u}$) (antisymétrie)
- $\det\left(\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right),\vec{w}\right)=a\det\left(\vec{u},\vec{w}\right)+b\det\left(\vec{v},\vec{w}\right)$ (bilinéarité)

Remarques : Soit (a, b) $\in \mathbb{C}^2$ avec a = x + iy et b = x' + iy'. Alors :

- Re($\bar{a}$b) = xx' + yy'
- Im($\bar{a}$b) = xy' – x'y.

Propriétés 3 : | det($\vec{u}, \vec{v}$) | = Aire(parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

1-4 Droites

Propriétés :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ det($\vec{u}, \vec{v}$) = 0.
- A, B, C trois points alignés $\Leftrightarrow$ det($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) = 0.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{v}$ = 0.

Conséquences :

- La droite (AB) a pour équation : det($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$) = 0 où M(x, y).
- La droite Δ passant par A et orthogonale à $\vec{u}$ a pour équation : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}$ = 0 où M(x, y).

Remarque : Si D : ax + by + c = 0, alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D et $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Représentation paramétrique : La droite passant par le point A(a, b) et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est représentée par la paramétrisation : $\begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equations polaires :

- Droite passant par O : θ = cste.
- Droite parallèle à (Oy) ne passant pas par O (x=a) : $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$.
- Droite parallèle à (Ox) ne passant pas par O (y=b) : $\rho = \dfrac{b}{\sin\theta}$.
- Droite D d'équation ax + by = c avec a $\neq 0$ et b $\neq 0$: $\rho = \dfrac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$.

1-5 Cercles

Rappel : Le cercle de centre A(a, b) et de rayon r a pour équation cartésienne, dans un repère orthonormé : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

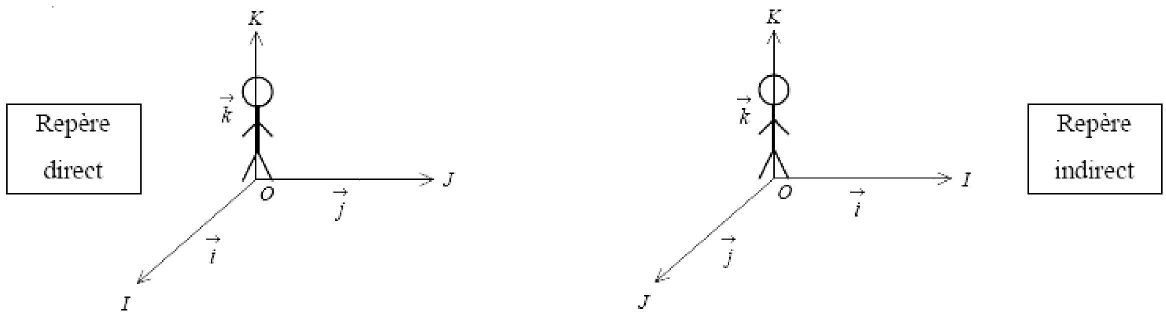
Propriété : Le cercle C de diamètre [AB] a pour équation : $\overrightarrow{BM} . \overrightarrow{AM} = 0$ où M(x, y).

Equations polaires :

- Cercle de centre O : $\rho = \text{cste}$.
- Cercle passant par O centré sur (Ox) en A(a, 0) : $\rho = 2a\cos\theta$.
- Cercle passant par O centré en A(a, b) : $\rho = 2(a\cos\theta + b\sin\theta)$.

2. Géométrie de l'espace

2-1 Repères Avant toutes choses, nous avons besoin dans ce chapitre d'orienter l'espace, c'est-à-dire distinguer les deux types de repères : direct et indirect. Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I. Le repère est dit "direct" si l'observateur à le point J à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.

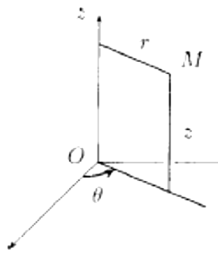


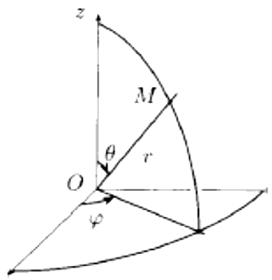
Propriété : Soient R={O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ } et R'={O' ; $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ } deux repères orthonormaux de l'espace tels que : $\begin{cases} \vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \\ \vec{j}' = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k} \\ \vec{k}' = g\vec{i} + h\vec{j} + i\vec{k} \end{cases}$ et $\overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$. Alors si un point M du plan a pour coordonnées (x, y, z) dans R et (x', y', z') dans R', on a :

$$x = \alpha + ax' + dy' + gz', \quad y = \beta + bx' + ey' + hz' \text{ et } z = \gamma + cx' + fy' + iz'.$$

Définition :

- On appelle repère cylindrique de l'espace tout repère {O ; $\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}, \vec{k}$ } où θ est un nombre réel et $\begin{cases} \overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{v(\theta)} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$.
- Le triplet (ρ, θ, z) tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u(\theta)} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées cylindriques du point M.
- On appelle coordonnées sphériques d'un point M(x, y, z) de l'espace le triplet (r,θ,φ) tel que : $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$.





2-2 Produit scalaire

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$.

Remarque : deux vecteurs de l'espace étant forcément coplanaires, on peut se placer dans le plan formé par ces vecteurs et les propriétés du produit scalaire dans le plan restent donc valables. On a donc immédiatement les propriétés suivantes :

Propriété 1 :
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$ (symétrie)
- $\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right).\vec{w} = a\left(\vec{u}.\vec{w}\right)+b\left(\vec{v}.\vec{w}\right)$ (bilinéarité)

Propriétés 2 :
Si R={O ; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ } est un repère orthonormé et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') respectivement dans R, alors : $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = xx' + yy' + zz'.

Propriété 3 : Si R={O ; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ } est un repère orthonormé et A et B deux points de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') respectivement dans R, alors :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\ .$$

2-3 Produit vectoriel

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui a pour norme $\left|\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$ et qui est directement orthogonal à ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

Remarque : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Propriétés 1 :
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$ (antisymétrie)
- $\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right)\wedge\vec{w} = a\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+b\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$ (bilinéarité)

Propriété 2 : Si R={O ; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ } est un repère orthonormé direct et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') respectivement dans R, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Remarque : $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|$ = Aire(parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

2-4 Déterminant (ou produit mixte)

Définition :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté. On appelle déterminant ou produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le réel noté det($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) égal à $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$.

Propriétés 1 :

- det($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) = - det($\vec{v},\vec{u},\vec{w}$) = - det($\vec{w},\vec{v},\vec{u}$) = det($\vec{v},\vec{w},\vec{u}$).
- $\det\left(\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right),\vec{w},\vec{t}\right) = a\det\left(\vec{u},\vec{w},\vec{t}\right)+b\det\left(\vec{v},\vec{w},\vec{t}\right)$.

Propriété 2 : $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ det($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$)=0.

Remarque : | det($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) | = Volume(parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$).

2-5 Droites et plans

Propriétés 3 :

- Si P est le plan d'équation : ax + by + cz + d = 0 et M le point de coordonnées (x_0,y_0,z_0), alors : d(M, P) = $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- Si P est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors d(M,P)=$\dfrac{\left|\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM})\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}$.
- Si D est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$, alors d(M,D)=$\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

2-5 Sphères

Définition : On appelle sphère de centre A et de rayon R (où $A \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$) l'ensemble

S(A,R)=$\left\{M \in E / \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = R\right\}$.

Propriétés : Etant donné une sphère S de centre A et de rayon R et un plan P :

- Si d(A,P)>R, alors $P \cap S = \varnothing$.
- Si d(A,P)=R, alors $P \cap S$ = {H} où H est la projection orthogonale de A sur P.
- Si d(A,P)<R, alors $P \cap S$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2(A,P)}$ où H est la projection orthogonale de A sur P.