Géo 5 – Surfaces remarquables

I. SURFACES CYLINDRIQUES

1. **Définition** On appelle nappe cylindrique Σ de direction $\vec{k}$, de directrice Γ de paramétrisation (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^1 sur I , la nappe définie par : $(t, u) \in I \times \mathbb{R} \to f(t) + u\,\vec{k}$.

2. **Propriétés**

a) Si on se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $\vec{k}$ dirige l'axe du cylindre, l'équation du cylindre peut s'écrire sous la forme $F(x,y) = 0$, où F est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U connexe de $\mathbb{R}^2$

b) Si P (x,y) est un point régulier de la courbe C d'équation $F(x,y) =0$ (dans le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$), alors tout point de la génératrice passant par P est régulier et le plan tangent en un point M de Σ est défini par la génératrice et la tangente en P à la courbe C.

3. **Changement de repère** Soit Σ un cylindre d'équation, $F(x,y) = 0$, dans un repère *R* (F de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$). Soit R' un autre repère. On note M (X, Y, Z) dans *R'*

Le changement de repère définit trois applications affines P, Q, R de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telles que :

$\begin{cases} x = P(X,Y,Z) \\ y = Q(X;Y,Z) \\ z = R(X,Y,Z) \end{cases}$. La droite d'équations $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$ donne la direction des génératrices (z'0z).

L'équation dans le nouveau repère s'écrit F (P,Q) = 0.

On admet la réciproque :

Théorème 1.
Soit F une application d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. Toute équation du type F (P,Q) = 0 où P et Q sont des fonctions affines , telles que P = 0 et Q = 0 soient des équations de plans sécants suivant une droite D dans un repère *R*, représente dans *R* une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la droite D.

Définition
On appelle base droite d'un cylindre, toute directrice située dans un plan perpendiculaire à son axe.

4. **Comment obtenir l'équation d'un cylindre ?**

a) On connaît la direction de son axe et les équations cartésiennes d'une directrice

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ le vecteur dirigeant l'axe du cylindre . Soit C la directrice $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

On a $M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $M + \lambda\,\vec{u} \in C \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $F(M + \lambda\,\vec{u}) = G(M + \lambda\,\vec{u}) = 0$

On obtient ainsi une équation du cylindre en éliminant le paramètre λ, c'est-à-dire en trouvant une CNS sur (x,y,z) pour que les deux équations précédentes aient une solution commune en λ.

b) On connaît la direction de l'axe et les équations paramétrées d'une directrice.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ le vecteur dirigeant l'axe du cylindre. Soit C la directrice $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, $t \in I$.

On a $M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $M + \lambda\,\vec{u} \in C \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists\, t \in I$, tels que $\begin{cases} x + \lambda\alpha = f(t) \\ y + \lambda\beta = g(t) \\ z + \lambda\gamma = h(t) \end{cases}$

c) On cherche le cylindre circonscrit à une surface S donnée d'équation F(x,y,z)=0 et de direction $\vec{u}$

On a $M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $P=M+\lambda\,\vec{u} \in S$ et le plan tangent à S au point P contient le vecteur $\vec{u}$.
(Il est conseillé dans ce cas de déterminer le contour apparent de S dans la direction du vecteur, puis le cylindre)

On peut écrire aussi : $M \in \Sigma \Leftrightarrow \left\{ \; F(x+\lambda\alpha, y+\lambda\beta, z+\lambda\gamma) = 0 \text{ et } \alpha F'_x(P) + \beta F'_y(P) + \gamma F'_z(P) = 0 \right.$

Dans le cas où F est une fonction polynôme, il suffit d'écrire que λ est racine double du système précédent.

II. CONES ET SURFACES CONIQUES

1. **Définition** On appelle nappe conique Σ de classe C^1, de sommet A, la nappe paramétrée :
$(t, u) \in I\times\mathbb{R} \rightarrow A + u\,\overrightarrow{g(t)}$ avec $g \in C^1(I)$. On suppose que : $\forall\, t \in I$, la famille $\left\{\overrightarrow{g(t)}, \overrightarrow{g'(t)}\right\}$ est libre.

2. **Propriétés** Tout point de la nappe Σ , sauf le sommet A, est régulier .

3. **Equation dans un repère d'origine le sommet A.** Soit $t_0 \in I$. On suppose, par exemple, que la première composante de g(t) est non nulle en t_0. Comme la famille $\left\{\overrightarrow{g(t)}, \overrightarrow{g'(t)}\right\}$ est libre, on admet qu'il existe un intervalle $J \subset I$, contenant t_0 tel que l'on puisse écrire $\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $\psi \in C^1(J)$.

Définition : une fonction f réelle définie sur U ouvert invariant par toute homothétie de centre 0 (ie : $\forall(x,y,z) \in U$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in U$), est dite homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$, si : $\forall M \in U$, $f(\lambda M) = |\lambda|^{\alpha} f(M)$.

Remarque : Précédemment, si on pose ; f(x,y,z)) = $\frac{z}{x} - \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, f est une fonction homogène de degré 0.

4. **Définition générale de surfaces coniques**

a) Définition On appelle surface conique, toute surface Σ d'équation F=0, où $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction homogène de classe C^p ($p \geq 1$) et U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, invariant par homothétie de centre 0.
O est appelé le sommet de la surface conique.
Pour tout point $M \neq O$, la droite (OM) est appelée génératrice.
On appelle directrice, toute courbe de l'espace rencontrant toutes les génératrices en dehors de O.
Une directrice plane est appelée une base.

b) Changement de repère Soit Σ un cône de sommet O, d'équation, f(x,y,z) = 0, dans un repère *R* (f fonction homogène de classe C^1 sur un ouvert U invariant par homothétie de centre 0)
Soit R' un autre repère. On note M (X, Y, Z) dans *R'*.
Le changement de repère définit trois applications affines P, Q, R de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$\begin{cases} x = P(X,Y,Z) \\ y = Q(X;Y,Z) \\ z = R(X,Y,Z) \end{cases} . \text{ Les équations } \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ R = 0 \end{cases} \text{ définissent trois plans dont le seul point commun est O.}$$

Dans ce repère *R'*, l'équation du cône s'écrit f(P, Q, R) = 0

On admet la réciproque :

Théorème 2 : Soit un repère *R* d'origine O. Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, invariant par toute homothétie de centre O. On suppose f homogène de degré α et vérifiant f(0,0,0) = 0.
Soient P, Q, R trois applications affines telles que les plans P=0 ; Q=0, R=0 soient sécants en un point A.
Alors l'équation f (P, Q, R) = 0 représente un cône de sommet A dans le repère *R*.

III. Surfaces de révolution.

1. **Nappe de révolution**

a) Définition Soit un arc Γ de classe C^p ($p \geq 1$) et une droite D.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on désigne par Γ_α l'arc déduit de Γ par la rotation autour de D d'angle α.
Alors la famille $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est appelée nappe de révolution d'axe D et de courbe directrice Γ.

b) Paramétrisation On se place dans le repère mobile $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ où $\vec{k}$ dirige la droite D.

La paramétrisation s'écrit $(t, \theta) \in I \times \mathbb{R} \to M = \rho(t)\,\vec{u} + \varphi(t)\,\vec{k}$, avec ρ et $\varphi \in C^1(I)$

c) Définitions Pour tout point M d'une nappe de révolution d'axe D, on appelle parallèle en M, le cercle perpendiculaire à D passant par M. Tout plan contenant D est appelé plan méridien. Il coupe la nappe en deux arcs symétriques par rapport à D, appelés méridiennes.

d) Propriété : En tout point M régulier d'une nappe de révolution de classe C^1, la normale en M est dans le plan (u, k), c'est-à-dire, le plan méridien passant par M.

Théorème 3 : Soit Σ une nappe de révolution de classe C^1. En tout point régulier M de cette nappe, le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien en M et la normale à la nappe est la normale à la méridienne.

e) Méthode :

- On caractérise la droite Δ par un point A et un vecteur directeur normé.
- Soit M_0 (x_0, y_0, z_0). On cherche l'équation du cercle d'axe Δ passant par le point M_0, en écrivant

$$\begin{cases} M \in \text{Plan orthogonal à } \Delta \text{ passant par } M_0 \\ d(M_0, \Delta) = d(M, \Delta) \end{cases}$$

- $M \in$ Surface $\Leftrightarrow \exists\, M_0 \in \Gamma$ / M_0 et M sont sur le même cercle d'axe Δ.
- Pour trouver l'équation de la surface de révolution, on élimine les paramètres x_0, y_0, z_0.

2. Condition pour qu'une surface soit de révolution.

Théorème 4 : On se place dans un repère orthonormé. Soit g une application de $V \to \mathbb{R}$, de classe C^p ($p \geq 1$). La surface d'équation g(S(x, y, z), P(x, y, z)) = 0 est une surface de révolution dont l'axe est la perpendiculaire menée du centre de la sphère S(x, y, z) = 0 au plan P = 0.

3. Exemples de surfaces de révolution.

a) Le paraboloïde de révolution obtenu par rotation d'une parabole autour de son axe.

Soit D (O, $\vec{k}$) l'axe. Equation : $x^2 + y^2 = 2pz$ Méridienne $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$

b) L'ellipsoïde de révolution obtenu par rotation de l'ellipse

Soit D (O, $\vec{k}$) l'axe. Equation : $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ Méridienne $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

c) L'hyperboloïde de révolution à une nappe obtenu par rotation de l'hyperbole autour de son axe non focal.

Soit D (O, k) l'axe. Equation : $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ Méridienne $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

d) L'hyperboloïde de révolution à deux nappes obtenu par rotation de l'hyperbole autour de son axe focal.

Equation : $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = -1$ Méridienne $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = -1 \end{cases}$