

Géo 4 – SURFACES ET NAPPES PARAMETREES

Dans tout le chapitre on se place dans l'espace affine euclidien orienté \mathbb{R}^3 , muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note U un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire non union de deux ouverts disjoints).

I. NOTION DE NAPPE PARAMETREE ET DE SURFACE

Définition 1 :

- i) On appelle nappe paramétrée tout couple $S = (U, f)$ où U est un domaine de \mathbb{R}^2 et f une fonction continue sur U , à valeurs dans \mathbb{R}^3 .
- ii) Si f est de classe C^p sur U , on dit que la nappe paramétrée est de classe C^p .
- iii) $f(U)$ est une surface, appelée support de U .

Définition 2 : S'il existe une fonction g continue telle que :

$$f(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = g(x, y) \end{cases}, \text{ alors } (U, f) \text{ est dite nappe paramétrée cartésienne.}$$

Remarque : on obtient une équation cartésienne de S en éliminant (u, v) dans le système d'égalités.

Définition 3 : Changements de paramétrage sur une nappe.

- a) Soit une nappe paramétrée (U, f) de classe C^p , ($p \geq 1$). Un changement de paramètre est un homéomorphisme ϕ d'un ouvert V de \mathbb{R}^2 dans l'ouvert U .
- b) Si on pose $g = f \circ \phi$, on définit ainsi une nappe paramétrée (V, g) ayant le même support que (U, f) .
- c) On dit que le changement de paramétrage ϕ est admissible, si ϕ est un difféomorphisme de V dans U , de classe C^p . On dit alors que les nappes (U, f) et (V, g) sont des nappes C^p -équivalentes.

Définition 4 : Points simples - Points multiples.

On appelle point **simple** de la nappe paramétrée (U, f) , tout point M du support correspondant à un couple unique (u, v) de paramètres. Sinon, il est dit **multiple** (cette notion est indépendante du paramétrage).

Définition 5 : Orientation d'une nappe paramétrée.

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes C^p -équivalentes et ϕ , le C^p -difféomorphisme tel que $g=f \circ \phi$. Si le Jacobien de ϕ est strictement positif, on dira que les nappes ont même orientation, sinon, d'orientations contraires.

Définition 6 : Soit S une nappe géométrique de classe C^1 , de paramétrisation (U, f) . Soient $m=(a, f(a))$ un point

de S et $df(a)$ définie par : $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, df(a).h = h_1 \frac{\partial f}{\partial u}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial v}(a)$ sa différentielle.

- i) On dit que m est un point régulier si $\text{rg}(df(a)) = \text{rg}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(a), \frac{\partial f}{\partial v}(a)\right) = 2$.
- ii) On dit que m est un point singulier si $\text{rg}(df(a)) < 2$.
- iii) On dit que S est une nappe régulière si tous ses points sont réguliers.

Propriété :

Toute nappe géométrique de classe C^1 admettant une paramétrisation cartésienne est simple et régulière.

II. PLAN TANGENT

Définition 1 :

Soient S une nappe géométrique de classe C^1 , de paramétrisation (U, f) et $m=(a, f(a))$ un point régulier de S .

- i) On appelle plan tangent en m à S le plan affine $P = m + \text{vect}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(a), \frac{\partial f}{\partial v}(a)\right)$.

ii) On appelle plan vectoriel tangent en m à S la direction : $\text{vect} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(a), \frac{\partial f}{\partial v}(a) \right)$.

iii) On appelle tangente en m à S toute droite affine passant par m incluse dans le plan tangent.

Remarque : Le plan tangent en un point régulier de S est inchangé lors d'un changement de paramètres admissible.

Définition 2 : Soient S une nappe géométrique de classe C^1 , de paramétrisation (U, f) et $m=(a, f(a))$ un point régulier de S . On appelle normale à S au point m la perpendiculaire en m au plan tangent en ce point.

Remarque : $N(a) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(a)$ est un vecteur directeur de la normale.

Propriété : Toute nappe géométrique de classe C^1 ayant une paramétrisation cartésienne admet une équation $F(x, y, z)=0$ dont le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}.F$ est un vecteur normal au plan tangent.

III. INTERSECTION DE DEUX SURFACES

Soient f et g deux applications de classe C^k d'un ouvert U de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} de surfaces respectives S et Σ .

Soit $\Gamma = S \cap \Sigma$ l'ensemble des points (x, y, z) de U vérifiant $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$.

On dit que Γ est la **courbe** définie par les équations $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$.

Définition : On dit qu'un point $M(a, b, c)$ de Γ est **régulier** si $\left(\overrightarrow{\text{grad}} f(M), \overrightarrow{\text{grad}} g(M) \right)$ est libre.

Remarque : Si $M(a, b, c)$ est un point **régulier** de Γ alors $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(M) & \frac{\partial f}{\partial y}(M) & \frac{\partial f}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(M) & \frac{\partial g}{\partial y}(M) & \frac{\partial g}{\partial z}(M) \end{pmatrix}$ est de rang 2 : cela

signifie qu'il existe une sous matrice carrée de taille 2 ayant un déterminant non nul.

Théorème : La tangente à Γ en $M(a, b, c)$, régulier de S et de Σ , est l'intersection des plans tangents aux surfaces S et Σ d'équations $f = 0$ et $g = 0$ en M .

IV. NAPPES REGLEES

Définition 1 :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , f et g deux applications continues de I sur \mathbb{R}^3 avec $g(t) \neq 0, \forall t \in I$.

i) On appelle nappe réglée une nappe S qui admet pour paramétrisation : $\begin{cases} I \times \mathbb{R} \rightarrow E \\ (t, u) \mapsto f(t) + u.g(t) \end{cases}$

ii) On appelle courbe directrice de S la courbe paramétrée $C = (I, f)$.

iii) On appelle génératrices de S les droites $D_t = \{m = f(t) + u.g(t) / u \in \mathbb{R}\}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarques :

- i) D_t a pour vecteur directeur $g(t)$.
- ii) $D_t \cap C = \{f(t)\}$.
- iii) $S = \bigcup_{t \in I} D_t$ (d'où son nom de surface réglée).

Exemple 1 : Nappe cylindrique Supposons g constante : $\forall t \in I, g(t) = k \in E \setminus \{0\}$.

La paramétrisation de S est alors : $\begin{cases} I \times \mathbb{R} \rightarrow E \\ (t, u) \mapsto f(t) + u.k \end{cases}$. Toutes les génératrices de S ont la même direction.

Exemple 2 : Nappe conique Supposons f constante : $\forall t \in I, f(t) = s \in E$.

$$\text{La paramétrisation de } S \text{ est alors : } \begin{cases} I \times \mathbb{R} \rightarrow E \\ (t, u) \mapsto s + u \cdot g(t) \end{cases}$$

Toutes les génératrices de S passent par s (sommet) et la directrice de S est réduite au point s .

Exemple 3 : Nappe engendrée par les tangentes à une courbe gauche

$$\text{La paramétrisation de } S \text{ est alors : } \begin{cases} I \times \mathbb{R} \rightarrow E \\ (t, u) \mapsto f(t) + u \cdot f'(t) \end{cases}$$

Théorème 1 :

- i) Sur une nappe cylindrique, toute génératrice qui contient un point régulier est régulière.
- ii) Sur une nappe conique, toute génératrice qui contient un point régulier possède un point singulier unique : le sommet.
- iii) Toute génératrice d'une nappe conique qui contient un point stationnaire distinct du sommet est stationnaire.

Théorème 2 : Soit S une nappe réglée de paramétrisation : $\begin{cases} I \times \mathbb{R} \rightarrow E \\ (t, u) \mapsto f(t) + u \cdot g(t) \end{cases}$.

En tout point simple et régulier de S le plan tangent contient la génératrice de ce point.

V. NAPPES DEVELOPPABLES

Définition 1 : Une nappe réglée S de classe C^1 qui admet pour paramétrisation : $\begin{cases} I \times \mathbb{R} \rightarrow E \\ (t, u) \mapsto f(t) + u \cdot g(t) \end{cases}$ est

dite développable si $F_t = (f'(t), g'(t), g(t))$ est liée, $\forall t \in I$.

Propriété 1 :

- i) Toute nappe cylindrique est développable.
- ii) Toute nappe conique est développable.

Propriété 2 : Soient $C = (I, h)$ une courbe birégulière de classe C^2 et S la nappe réglée engendrée par la tangente à C au point $h(t)$ quand t parcourt I . Alors S est développable.

Définition 2 : Cette nappe est appelée développable des tangentes à C .

Propriété 3 : Soit S la développable des tangentes à C , courbe birégulière.

Toute génératrice D_t de S possède un unique point stationnaire. C'est le point de contact de D_t avec C .

Remarque : L'arc C est donc une ligne de points stationnaires de sa développable à ses tangentes S .

Propriété 4 : Soit S la développable des tangentes à C , courbe birégulière.

Le plan tangent à S relatif à D_t coïncide avec le plan osculateur à C au point de contact de D_t .

VI. EXEMPLES DE COURBES TRACEES SUR UNE SURFACE

1. Définitions

Soit S une surface d'équation $F(x, y, z) = 0$ avec $F \in C^p(U)$ (U ouvert de \mathbb{R}^3 et $p \geq 1$).

On dit que la courbe paramétrée $\Gamma : t \in I \mapsto M(x(t), y(t), z(t))$ est tracée sur la surface S si :

$\forall t \in I$, on a $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ (où I est un ouvert de \mathbb{R}).

Soit Σ une nappe de paramétrisation (U, f) de classe C^p (U ouvert de \mathbb{R}^2 et $p \geq 1$).

Soit C un arc de \mathbb{R}^2 de paramétrisation $t \in I \mapsto h(t) = (u(t), v(t))$ dont le support est inclus dans U avec h de classe C^q sur I ($q \geq 1$).

Alors l'arc Γ de paramétrisation $(I, f \circ h) : t \in I \mapsto f(u(t), v(t))$ est tracé sur la nappe Σ . On note $\Gamma = f(C)$.

2. Lignes de coordonnées.

Définition :

Soit Σ une nappe de paramétrisation (U, f) . On appelle lignes de coordonnées en un point $M_0(u_0, v_0)$, l'un des arcs tracés sur la nappe, de paramétrisation : $u \in I \rightarrow f(u, v_0)$ ou $v \in J \rightarrow f(u_0, v)$ avec $I \times J \subset U$.

3. Exemples de recherche de droites tracées sur des quadriques

- Déterminer les droites tracées sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe d'équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- Déterminer les droites tracées sur le parabolôïde hyperbolique d'équation : $x^2 - y^2 - 2z = 0$.

4. Trajectoires orthogonales

Définition :

Soient S une surface et $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille de courbes tracées sur S . On appelle **trajectoire orthogonale** de (Γ_λ) (sur S) toute courbe C , tracée sur S , et coupant orthogonalement chacune des courbes Γ_λ . (où I intervalle de \mathbb{R}).

Supposons qu'il existe un ouvert V de \mathbb{R}^3 et $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur V telle que pour tout $\lambda \in I$, Γ_λ admet pour équation cartésienne : $F(x, y, \lambda) = 0$.

L'élimination de λ dans le système :
$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) + y' \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$
 donne une relation de la forme

$f(x, y, y') = 0$ appelée **équation différentielle (du 1er ordre) de la famille de courbes**.

Propriété : Soit $(\Gamma_\lambda)_\lambda$ une famille de courbes admettant une équation différentielle $f(x, y, y') = 0$.

Une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de $(\Gamma_\lambda)_\lambda$ est $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$

5. Lignes de plus grande pente

Définition :

- On appelle **ligne de niveaux** de la surface S les sections de S par les plans horizontaux.
- On appelle **ligne de plus grande pente** de la surface S les trajectoires orthogonales de la famille des lignes de niveaux de S .

6. Contour apparent cylindrique dans une direction donnée

Définition : Etant donnée une surface S et un vecteur non nul \vec{u} , on appelle **cylindre circonscrit** Σ à la surface

S de direction \vec{u} la réunion des tangentes à S dirigées par le vecteur \vec{u} .

On appelle **contour apparent cylindrique de S dans la direction \vec{u}** , l'ensemble des points de S en lesquels la direction du plan tangent contient \vec{u} , c'est-à-dire l'intersection de S avec le cylindre circonscrit Σ .

Méthode : Le contour apparent est : $\Gamma = \{ m \in S \text{ tel que le vecteur normal en } m \text{ à } S \text{ est orthogonal à } \vec{u} \}$

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists m \in \Gamma, \exists \lambda \in \mathbb{R} / \vec{Mm} = \lambda \vec{u}.$$

7. Contour apparent conique vu d'un point

Définition : Soient une surface S et un point A , on appelle cône de sommet A circonscrit à S la réunion des tangentes à S passant par A . On appelle **contour apparent de S du point de vue de A** l'ensemble des points de Σ en lesquels le plan tangent contient le point A , c'est-à-dire l'intersection de S avec le cône circonscrit précédent.

Méthode : Le contour apparent est : $C = \{ m \in S \text{ tel que le vecteur normal en } m \text{ à } S \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{Am} \}$

$$M \in \text{Cône} \Leftrightarrow \exists m \in C, \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{Am}$$