Géo 3 – Courbes gauches

I. Généralités

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions vectorielles de I dans E et φ une application bilinéaire : φ: $E\times E \to F$, on suppose les fonctions f et g dérivables sur I.
On a les propriétés suivantes :

- $\varphi(f, g) : t \to \varphi(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et on a : $[\varphi(f, g)]'(t) = \varphi(f'(t), g(t)) + \varphi(f(t), g'(t))$
- Si φ est le produit scalaire ($F = \mathbb{R}$) : $(f . g)'(t) = f'(t) . g(t) + f(t) . g'(t)$
- Si φ est le produit vectoriel ($F = \mathbb{R}^3$) : $(f \wedge g)'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t)$

Définition 1 :
On se place dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$. On appelle courbe gauche toute courbe de l'espace.

Projection sur les plans de coordonnées
Soient Γ une courbe gauche, de RP ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$) et $t \in I$. La projection de Γ sur le plan xoy (parallèlement à zz') admet pour RP ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$), $t \in I$. On a un résultat analogue pour les deux autres projections.

II. Tangente en un point

Définition 2 : En tout point birégulier d'un arc régulier (I, $\vec{f}$), c.a.d. tel qu'en tout point t, la famille ($\vec{f}'(t)$, $\vec{f}''(t)$) est libre, on appelle plan osculateur le plan (M, $\vec{f}'(t)$, $\vec{f}''(t)$).

Remarque : De manière générale, le plan osculateur en M est le plan défini par les deux premiers vecteurs dérivés non colinéaires ; la position de la courbe par rapport à ce plan dépend de la parité de l'entier de dérivation du troisième vecteur non colinéaire aux deux précédents.

Définition 3 : On appelle ***vecteur tangent unitaire (orientant)*** de Γ en un point régulier à une courbe gauche de classe C^1, le vecteur, noté $\vec{T}$, défini par : $\vec{T} = \dfrac{\vec{f}'}{\|f'(t)\|}$.
On appelle ***normale*** en un point à une courbe gauche de classe C^2, toute droite perpendiculaire en ce point à la tangente.
On appelle ***normale principale***, celle qui est dans le plan osculateur.

Définition 4 : On appelle ***hélice*** toute courbe Γ de l'espace de classe C^1, régulière, pour laquelle il existe un vecteur unitaire fixe $\vec{u}$, tel que l'angle $\alpha = (\vec{u}, \vec{T})$ soit de mesure constante (modulo 2 π).

III. Abscisse curviligne

On reprend les mêmes définitions et les mêmes notations que dans le plan.

Rappel :

- On appelle abscisse curviligne de M (t), la longueur de l'arc $\overset{\frown}{M_0M}$. Elle est notée s(t).
- Pour un arc (I, $\vec{f}$) de classe C^1 sur I = [a, b], on a : $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{f}'(u)\| du$. On note $ds = \|f'(t)\| dt$.
- Si la courbe paramétrée est définie par $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, la longueur de l'arc M_0M est $\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$.
- On appelle ***paramétrage normal*** de l'arc (I, $\vec{f}$) tout paramétrage tel que en tout point M(u) on ait $\|M'(u)\| = 1$.

- Soit un arc géométrique régulier de classe C^1 de paramétrisation $(I, \vec{f}(t))$. La courbe paramétrée définie par la fonction vectorielle $\vec{g} = \vec{f} \circ s^{-1}$ a le même support que $\vec{f}$.
- Alors l'abscisse curviligne représente un nouveau paramétrage de la courbe appelé paramétrage normal.

En conséquence, en tout point de (J, $\vec{g}(s)$) le vecteur tangent $\overrightarrow{T(s)} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$ est normé .

IV. Etude métrique Soit (J, $\vec{g}(s)$) un arc paramétré de classe C^2, régulier, orienté de trajectoire notée Γ.

Définition 5 :

- On appelle ***courbure*** de Γ en un point M (s), le réel strictement positif γ(s) (ou γ) défini par : $\gamma = \left\| \dfrac{d\vec{T}}{ds} \right\|$
- On appelle ***rayon de courbure*** de Γ en un point M (s), et on note R(s) (ou R) le réel strictement positif défini par : $R = \dfrac{1}{\gamma}$
- On appelle ***vecteur normal principal*** de X en un point M (s), et on note $\overrightarrow{N(s)}$ (ou $\vec{N}$) le vecteur défini par : $\vec{N} = R\dfrac{d\vec{T}}{ds}$.

Remarque 4.1 :

- On a $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{\vec{N}}{R}$, $\|\vec{N}\| = 1$, R>0.
- Le plan osculateur en M(s) à Γ, étant dirigé par $\left(\dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}, \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2} \right)$, est aussi dirigé par $\left(\vec{T}, \vec{N}\right)$.
- On a ∀ s ∈ J, $\left\|\overrightarrow{T(s)}\right\|^2 = 1$, par dérivation, on obtient : ∀ s ∈ J, $\overrightarrow{T(s)} . \dfrac{d\vec{T}}{ds} = 0$, c-à-d $\vec{T}.\vec{N} = 0$.

Définition 6 :

- On appelle ***vecteur binormale*** de Γ en un point M (s), $\overrightarrow{B(s)}$ (ou $\vec{B}$) le vecteur défini par : $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$
- On appelle ***repère de Frenet*** de Γ en un point M (s), le repère orthonormé direct $\left(M; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$.

Remarque 4.2:

- La ***binormale*** en un point M(s) dirige la droite perpendiculaire en M au plan osculateur.
- $\left(M, \vec{T}, \vec{N}\right)$ est le plan osculateur. $\left(M, \vec{N}, \vec{B}\right)$ est le plan normal
- $\left(M, \vec{T}, \vec{B}\right)$ est le plan rectifiant.

Définition 7 : On se place en un point trirégulier d'un arc paramétré gauche (I, g)

- On appelle ***torsion*** de Γ en un point M (s), et on note τ (s) (ou τ) le réel défini par : $\tau = \vec{B}.\dfrac{d\vec{N}}{ds}$
- Si τ ≠ 0, on appelle ***rayon de torsion*** de Γ en un point M (s), le réel noté T(s) (ou T) défini par : $T = \dfrac{1}{\tau}$

Remarque : pour une courbe plane, la torsion est nulle.

Formules de Frenet $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{\vec{N}}{R}}$ $\boxed{\dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\dfrac{\vec{T}}{R} + \dfrac{\vec{B}}{T}}$ $\boxed{\dfrac{d\vec{B}}{ds} = -\dfrac{\vec{N}}{T}}$