

Géo 2 – Courbes planes

I. Propriétés métriques du premier ordre d'une courbe plane.

1.1 Enveloppe d'une famille de droites.

Définition 1 : On appelle enveloppe d'une famille de droites à un paramètre $(D_t)_{t \in I}$, un arc paramétré

$C = (I, \vec{f})$ tel que pour tout $t \in I$, la droite D_t est tangente à l'arc C en $\vec{f}(t)$.

Théorème 1 (Condition d'existence)

Soit une famille de droites $(D_t)_{t \in I}$ d'équations : $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$

où $t \in I$ et a, b, c des fonctions de classe C^1 sur I telles que : $\forall t \in I, \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

Alors cette famille de droites admet une enveloppe Γ paramétrée par $(x = x(t), y = y(t))$ où $(x(t), y(t))$ est la solution du système :
$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 \end{cases}$$

On se place dans un repère orthonormé. Soit (I, \vec{f}) un arc de classe C^1 sur $I = [a, b]$, régulier, orienté dans le sens de t croissant. On se fixe une origine $M_0(t_0)$.

1.2 Abscisse curviligne

Définition 2 :

On appelle abscisse curviligne de $M(t)$, la longueur de l'arc $\widehat{M(t_0)M(t)}$. Elle est notée $s(t)$.

Théorème 2 : Pour un arc (I, \vec{f}) de classe C^1 sur $I = [a, b]$, on a : $s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{f}'(u)\| du$. On note $ds = \|\vec{f}'(t)\| dt$

Remarques :

- Sur la courbe paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$, la longueur de l'arc $\widehat{M(t_0)M(t)}$ est $\int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.
- Sur la courbe paramétrée par $\theta \mapsto \rho(\theta)$ la longueur de l'arc $\widehat{M(t_0)M(t)}$ est $\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$.

Définition 3 : On appelle **paramétrage normal** de l'arc (I, \vec{f}) tout paramétrage tel que en tout point $M(u)$ on ait $\|\vec{M}'(u)\| = 1$.

Propriété : Soit un arc géométrique régulier de classe C^1 de paramétrisation $(I, \vec{f}(t))$. La courbe paramétrée définie par la fonction vectorielle $\vec{g} = \vec{f} \circ s^{-1}$ a le même support que \vec{f} . Alors l'abscisse curviligne représente un nouveau paramétrage de la courbe appelé paramétrage normal. En conséquence, en tout point de $(J, \vec{g}(s))$ le vecteur tangent est normé (le paramétrage normal correspond donc à un parcours de la courbe à la vitesse constante 1).

Définition 4 : Soit C un arc paramétré de classe C^2 , régulier, orienté. On appelle :

- **Vecteur tangent unitaire** en un point M le vecteur $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$;
- **Vecteur normal unitaire** \vec{N} , le vecteur directement orthogonal à \vec{T} ;
- **repère de Frenet** en M le repère orthonormé $(M; \vec{T}, \vec{N})$.

II . Propriétés du deuxième ordre.

2.1 Courbure et rayon de courbure On se place en un point $M(s)$ birégulier donc où $\frac{d\vec{T}}{ds}$ et \vec{T} sont linéairement indépendants. Soit l'angle $\alpha = (\vec{i}, \vec{T})$, on a :

$$\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N} = C \vec{N}} ; \boxed{\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\alpha}{ds} \vec{T} = -C \vec{T}} \quad (\text{Formules de Frenet})$$

Le réel $C = \frac{d\alpha}{ds}$ est appelé *courbure*, $R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\alpha}$ est appelé *rayon de courbure*

Remarques :

- $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est en fait $g''(s)$. Ce vecteur est dirigé dans le sens de la concavité de la courbe.
- Le rayon de courbure est un rayon algébrique

Calcul théorique du rayon de courbure:

- Supposons que Γ soit donnée par $(x = x(t), y = y(t))$ un paramétrage de classe C^2 . On a alors :

$$\text{le rayon de courbure } R = \frac{s'}{\alpha'} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$$

- Supposons que Γ soit donnée par une équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ où ρ est de classe C^2 . On a alors :

$$\text{le rayon de courbure } R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho\rho'' - \rho\rho''}$$

Définition 5 :

- On appelle centre de courbure en un point $M(s)$ birégulier, le point Ω défini par $\overline{M\Omega} = R \vec{N}$
- On appelle cercle de courbure en $M(s)$, le cercle de centre Ω et de rayon $|R|$.

2.2 Développées et développantes.

Définition 6 : On appelle développée d'un arc paramétré $\Gamma = (I, \vec{f})$, l'ensemble des centres de courbures en M à l'arc paramétré lorsque M décrit la courbe Γ .

Théorème 3 : La développée de Γ est aussi l'enveloppe des normales à Γ .

Définition 7 : Soient Γ et C deux courbes de classe C^2 du plan.

On dit que Γ est une développante de C si C est la développée de Γ .

Théorème 4 : Soit C une courbe de classe C^3 du plan. On note s une abscisse curviligne sur C , $\Omega(t)$ le point courant de C et \vec{T} le vecteur tangent unitaire en $\Omega(t)$ à C . Alors les développantes de C sont les courbes définies par les paramétrages :

$$\overline{OM(t)} = \overline{O\Omega(t)} + (s_0 - s(t))\vec{T}(t)$$

pour $s_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Remarques 3 :

- Les normales aux développantes sont tangentes à la développée.
- Il n'y a pas unicité de la développante.