Géo 1. Courbes paramétriques du plan (Révision)

1. NOTION DE COURBE

Une courbe est une partie de $\mathbb{R}^2$ qui peut être définie par :

- une équation cartésienne : $y = f(x)$, où $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$.
- une équation implicite : $g(x,y) = 0$, où $g : U \to \mathbb{R}$ avec $U \subset \mathbb{R}^2$.
- une représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in D \subset \mathbb{R}$ **.**
- une équation polaire $\rho = r(\theta)$ avec $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$.

2. COURBES PARAMETRIQUES

Soit (A, E) un espace affine de dimension 2 de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2.1 Définitions

- On appelle courbe paramétrique de A un couple C=(D,φ) où D est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et φ une application de classe C^1 définie sur D à valeurs dans A .

- On note $M(t) = \varphi(t)$ et $\vec{V}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$

- On dit que $A \in C$ est un point de multiplicité n si $\mathrm{card}(\varphi^{-1}(A)) = n$:

- On dit que $A \in C$ est un **point simple** si n = 1 , **point double** si n = 2 , etc.

- On dit que M = φ(t) est un point **stationnaire** (ou singulier) si $\varphi'(t) = \vec{0}$

- On dit que M = φ(t) est un point **régulier** si $\varphi'(t) \neq \vec{0}$

- On dit que C est **régulière** lorsque tout point de C est régulier .

- On dit que C = (D,φ) est de classe C^k ($k \geq 1$) si φ est de classe C^k sur D

2.2 Tangentes

Définition : Soient (D,φ) une courbe paramétrique et $M_0=\varphi(t_0)$ pour $t_0 \in D$. S'il existe un vecteur directeur de la droite $(M_0M(t))$ qui admet un vecteur limite $\vec{u}(t_0)$ non nul quand t tend vers t_0, alors la droite T passant par M_0 de vecteur directeur $\vec{u}(t_0)$ est appelée **tangente** à C en (M_0, t_0).

Théorème : Soient (D, φ) une courbe paramétrique de classe C^1 sur D et $M_0=\varphi(t_0)$ pour $t_0 \in D$.

- Si $\varphi'(t_0) \neq \vec{0}$ alors $\varphi'(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente en (M_0,t_0).
- Si $\varphi'(t_0) = \vec{0}$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^{(n)}(t_0) \neq \vec{0}$ alors un vecteur directeur de la tangente T en (M_0,t_0) est $\varphi^{(p)}(t_0)$ où p est le plus petit entier n tel que $\varphi^{(n)}(t_0) \neq \vec{0}$.

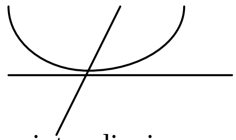
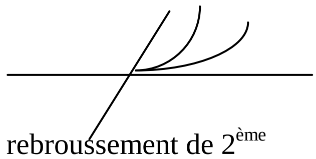
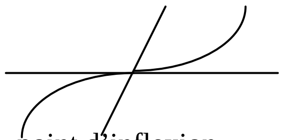
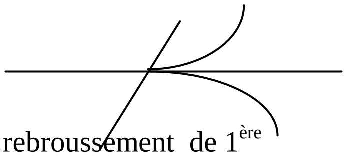
Remarque : dans la suite on suppose que cette condition est réalisée (c'est à dire : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^{(n)}(t_0) \neq \vec{0}$);

Proposition : Soit C = (D, φ) avec φ = (f, g) de classe C^1 sur D.

i) si $\lim\limits_{t_0} \frac{g'}{f'} = L$ ($L \in \mathbb{R}$), L est un coefficient directeur de la tangente en (M_0, t_0).

ii) si $\lim\limits_{t_0} \frac{g'}{f'} = \pm\infty$ la tangente en (M_0, t_0) est la droite $(M_0, \vec{j})$.

2.3 Position de la courbe par rapport à la tangente Soient C = (D,φ) une courbe paramétrée et φ de classe C^k sur D ($k \geq 2$). On suppose qu'il existe $n \in N^*$ tel que $(\varphi^{(p)}(t_0),\varphi^{(n)}(t_0))$ soit une famille libre. Soit q le plus petit entier n vérifiant cette propriété. On note $\vec{V}_1 = \varphi^{(p)}(t_0)$ et $\vec{V}_2 = \varphi^{(q)}(t_0)$

	p impair	p pair
q pair	 point ordinaire	 rebroussement de 2ème espèce
q impair	 point d'inflexion	 rebroussement de 1ère espèce

Remarque : un point est dit **birégulier** lorsque p = 1 et q = 2

2.4 Branches infinies

Définition : Soit C = (D, φ) avec φ = (f, g) une courbe paramétrique. On dit que C présente une branche infinie si : $\exists\, t_0 \in \overline{D} \;/\; \left\| \vec{V}(t) \right\| \to \infty$ quand $t \to t_0$.

Remarque : Cela revient à dire qu'une au moins une des coordonnées tend vers l'infini quand $t \to t_0$:

1°) cas : $\begin{cases} \lim\limits_{t_0} f = \pm\infty \\ \lim\limits_{t_0} g = y_0 \end{cases}$ la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à C

2°) cas : $\begin{cases} \lim\limits_{t_0} f = x_0 \\ \lim\limits_{t_0} g = \pm\infty \end{cases}$ la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à C

3°) cas : $\begin{cases} \lim\limits_{t_0} f = \pm\infty \\ \lim\limits_{t_0} g = \pm\infty \end{cases}$ on étudie alors la limite de $\dfrac{g}{f}$ en t_0

- si $\lim\limits_{t_0} \dfrac{g}{f} = 0$ alors C admet une branche parabolique de direction (Ox)
- si $\lim\limits_{t_0} \dfrac{g}{f} = \pm\infty$ alors C admet une branche parabolique de direction (Oy)
- si $\lim\limits_{t_0} \dfrac{g}{f} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) direction asymptotique de coefficient directeur a :
  - -si $\lim\limits_{t_0}(g - af) = \pm\infty$ C admet une branche parabolique dans la direction de Δ : y = ax
  - -si $\lim\limits_{t_0}(g - af) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) la droite d'équation y = ax + b est asymptote à C

Remarques :
- On précise la position de C par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de g(t)- af(t) -b
- L'étude des branches infinies peut souvent se faire à partir des développements limités généralisés de f et g au voisinage de t_0.