

An 10 - INTEGRALES MULTIPLES

1. INTEGRALE DOUBLE

1.1 Intégrale double sur un pavé

Définition 1:

L'intégrale double sur un pavé $P = [a, b] \times [c, d]$ de \mathbb{R}^2 d'une fonction f réelle ou complexe,

continue sur P , est :
$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Remarque : l'aire de P se calcule en choisissant $f = 1$: $\iint_P 1 dx dy = A(P)$

Théorème de Fubini :

La fonction f réelle ou complexe étant continue sur le pavé $P = [a, b] \times [c, d]$, on a :

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Propriété 1 : Si f se décompose en $f(x, y) = g(x) h(y)$, on a :

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right]$$

1.2 Extension de la notion d'intégrale double – Aire plane

Définition 2 : On appelle **compact élémentaire** une partie D de $P = \mathbb{R}^2$ pouvant être définie simultanément par : $D : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)$ ou par $D : c \leq y \leq d, r(y) \leq x \leq s(y)$ où $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $r, s : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Définition - Théorème 3:

L'intégrale double sur un compact élémentaire D de \mathbb{R}^2 d'une fonction f réelle ou complexe,

continue sur D , est :
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Remarques :

i) Ce résultat est encore appelé théorème de Fubini.

ii) L'aire de D se calcule en choisissant $f = 1$: $\iint_D 1 dx dy = A(D)$.

Propriété 2 :

Soient un compact élémentaire D de \mathbb{R}^2 et une fonction f réelle ou complexe, continue sur D .

- $A(D) = 0 \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = 0$
- L'application $f \mapsto \iint_D f(x, y) dx dy$ est une forme linéaire sur $C(D, \mathbb{K})$

Propriété 3 : positivité et croissance

i) si $f \geq 0$ sur D alors $\iint_D f(x,y) dx dy \geq 0$

ii) si $f \leq g$ sur D alors $\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D g(x,y) dx dy$

iii) $A(D) \inf_D f \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq A(D) \sup_D f$

iv) $|\iint_D f(x,y) dx dy| \leq \iint_D |f(x,y)| dx dy$

Propriété 4 : inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f et g intégrables sur un compact élémentaire D de \mathbb{R}^2 alors : $\left(\iint_D fg\right)^2 \leq \left(\iint_D f^2\right)\left(\iint_D g^2\right)$

Propriété 5 : effet d'une symétrie

Soit D un compact élémentaire de \mathbb{R}^2 admettant un élément de symétrie, c'est à dire qu'il existe une symétrie s et une partie Δ de D telle que $D = \Delta \cup s(\Delta)$ et $\Delta \cap s(\Delta)$ est d'aire nulle.

Alors si $f(s(M)) = f(M)$ pour tout $M(x,y) \in D$ $\iint_D f(x,y) dx dy = 2 \iint_\Delta f(x,y) dx dy$

si $f(s(M)) = -f(M)$ pour tout $M(x,y) \in D$ $\iint_D f(x,y) dx dy = 0$

1.3 Changement de variables dans une intégrale double

Définition 4 : Soient U, V ouverts de \mathbb{R}^2 et $\varphi : U \rightarrow V / \forall (x,y) \in U, \varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

On dit que φ est de **classe C^1** sur U si P et Q sont de classe C^1 sur U .

On appelle **matrice jacobienne** de φ sur U la matrice $J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

On appelle **jacobien** ou **déterminant jacobien** de φ le déterminant de $J_\varphi(x,y)$ noté J

Théorème : Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 , $\varphi : U \rightarrow V$ de classe C^1 , D et Δ deux compacts élémentaires de \mathbb{R}^2 tels que $D \subset U$ et $\Delta \subset V / \varphi(D) = \Delta$. On suppose de plus que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents est négligeable. Si $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et bornée alors : $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v)) |\det(J_\varphi(u,v))| du dv$.

Applications :

Passage en polaires (dans le plan euclidien orienté) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (\rho, \theta) \mapsto \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} J = \rho$

Remarque : le plus souvent on choisit D pour avoir $\rho \geq 0$

Coordonnées elliptiques (dans le plan euclidien orienté)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (x = a \cosh r \cos \theta, y = b \sinh r \sin \theta) \quad J = abr$

Changement de variables affine : $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, ad - bc \neq 0$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u,v) \mapsto (x = au + bv, y = cu + dv) \quad J = ad - bc$

2. INTEGRALE TRIPLE

L'étude est similaire à celle de l'intégrale double, l'intégrale triple vérifie les mêmes propriétés :

i) Compact élémentaire \rightarrow compact cubable

ii) $\iiint_D 1 dx dy dz$ donne le **volume** de D

Théorème de Fubini : f continue, bornée sur un compact cubable D de \mathbb{R}^3

i) cas où D est un pavé $D = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} \left[\int_b^{b'} \left(\int_c^{c'} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

ii) **intégration par piles :** cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in d \text{ et } u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$
d un compact élémentaire de \mathbb{R}^2 , u, v applications continues de $d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_d \left[\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

iii) **intégration par tranches :** cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq z \leq b, (x, y) \in d(z)\}$
 $d(z)$ un compact élémentaire de \mathbb{R}^2 pour tout $z \in [a, b]$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{d(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

Changement de variables : le théorème est identique à celui des intégrales doubles

Passage en coordonnées cylindriques : On appelle **système de coordonnées cylindriques** d'un point $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un triplet (ρ, θ, z) où (ρ, θ) est un système de coordonnées polaires de

m projection orthogonale de M sur le plan (xOy) , on obtient :
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$
 dans ce cas $J = \rho$

Remarque : on pourra retenir : *en passant en coordonnées **cylindriques** dans une intégrale triple on remplace $dx dy dz$ par $|\rho| d\rho d\theta dz$*

En général on prend $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$

Passage en coordonnées sphériques : On appelle **système de coordonnées sphériques** d'un point $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, un triplet (ρ, θ, φ) où $\rho = OM$ et θ est l'angle polaire de m projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) (orienté directement) et φ est l'angle (\vec{k}, \vec{OM})

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{dans ce cas } J = \rho^2 \sin \varphi$$

Rq : on pourra retenir : *en passant en coordonnées **sphériques** dans une intégrale triple on remplace $dx dy dz$ par $\rho^2 |\sin \varphi| d\rho d\theta d\varphi$*

En général on prend $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \pi]$ ainsi $\sin \varphi \geq 0$