

An 9 – Fonctions de plusieurs variables

I. FONCTIONS CONTINUES DE \mathbb{R}^p DANS \mathbb{R}^n

a) Applications coordonnées :

Soit f une application de Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n . On notera $f : x=(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Les applications f_1, \dots, f_n , qui sont définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , sont appelées applications coordonnées de f .

Définition 1 : Soit f une application de Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , $a \in \Omega$. On dit que f est *continue* en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, (\|x - a\| \leq \alpha \text{ et } x \in \Omega) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1 : Soient f une application de Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $a \in \Omega$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est continue en a .
- 2) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_k est continue en a .
- 3) Pour toute suite (x_n) d'éléments de Ω de limite a , la suite $(f(x_n))_n$ admet pour limite $f(a)$.
- 4) Pour toute suite (x_n) d'éléments de Ω de limite a , $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(f_k(x_n))_n$ admet pour limite $f_k(a)$.

b) Fonctions partielles :

Définition 2 : Soient f une application de Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et $a = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_i = \{ t \in \mathbb{R} / (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \in \Omega \}$, on appelle $i^{\text{ème}}$ *fonction*

partielle de f en a l'application : $f_i : \begin{cases} E_i \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{cases}$

Proposition 2 : Soit f une application de Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , continue en a de Ω . Alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle en a est continue en a_i .

II. DIFFERENTIATION

a) Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles premières:

Définition 3 : Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , $a \in \Omega$ et u un vecteur non nul de \mathbb{R}^p . On dit que f admet une *dérivée partielle en a suivant le vecteur u* et on note $\partial f_u(a)$, la dérivée en a , si elle existe, de la fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n par :

$$t \mapsto f(a + tu) \in \mathbb{R}^n, \quad \partial f_u(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Définition 4 : Soient \mathbb{R}^p muni de la base (e_1, \dots, e_p) , Ω un ouvert de \mathbb{R}^p , $a = \sum_{i=1}^p a_i e_i / a_i \in \mathbb{R}$, $a \in \Omega$,

et f de Ω dans \mathbb{R}^n . Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on appelle *$i^{\text{ème}}$ dérivée partielle première* de f en a , si elle

existe, la dérivée partielle de f suivant le vecteur e_i et on note la note $\partial f_i(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

$$\text{Soit : } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{t}.$$

Proposition 3 : Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et $a \in \Omega$. L'application f possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application coordonnées f_k de f admet une

dérivée partielle $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)$. On a alors :
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \right)$$

b) **Différentiation :**

Définition 5 :

Soient f une application de Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et $a \in \Omega$. On dit que f est **différentiable** en a s'il existe :

1. Une application L linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n ;
2. Un réel $\varepsilon > 0$, ε une application de $B(0, r) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^n , vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

tels que pour tout h de \mathbb{R}^p avec $a + h \in \Omega$ on ait $f(a + h) - f(a) - L(h) = \|\mathbf{h}\|\varepsilon(h)$.

On appelle **différentielle** de f en a , et on note $df(a)$ l'application L d'où :

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Théorème 1 : Soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n . Si f est différentiable en a de Ω , alors f est continue en a .

Propriétés 1 : Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et $a \in \Omega$.

- **P 1.1** Unicité : la différentielle, si elle existe, est unique.
- **P 1.2** Linéarité : Soient f et g 2 applications différentiables en a , $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est différentiable en a et on a : $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$.
- **P 1.3** Applications Coordonnées : f est différentiable en a ssi pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application coordonnées f_k est différentiable en a . De plus $df(a) = (df_1(a), \dots, df_n(a))$.
- **P 1.4** Plan tangent : Soient $p = 2$, $n = 1$ et $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$, alors $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \Omega, z = f(a_1, a_2) + df(a_1, a_2)(x - a_1, y - a_2)\}$ est le plan tangent à la surface \mathcal{S} au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$.

Théorème 2 : Soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , différentiable en un point a de Ω . Alors f admet toutes ses dérivées partielles premières en a et de plus on a :

$$df(a) : h = (h_1, \dots, h_p) \mapsto df(a)(h) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\overrightarrow{Grad} f(a) | h).$$

Définition 6 : Soient f une application de l'ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n différentiable en $a \in \Omega$ et f_1, \dots, f_n ses applications coordonnées.

1. On appelle **matrice jacobienne** de f en a , la matrice $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}}$, appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Si $n = p$ on appelle **Jacobien** de f en a le déterminant de $J_f(a)$ noté : $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$.

c) **Applications de classe C^1 :**

Définition 7 :

1. Une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n est dite **différentiable** sur Ω si elle est différentiable en tout point de Ω .
2. f est continûment différentiable sur Ω , ou de classe C^1 sur Ω , si l'application $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $df : a \mapsto df(a)$ est continue.

Proposition 4 : (Conditions suffisantes pour que f soit différentiable)

Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et $a \in \Omega$.

S'il existe un réel $r > 0$ pour lequel toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i \in \llbracket 1, p \rrbracket$) sont définies sur $B(a, r)$

et si de plus elles sont continues en a , alors f est différentiable en a .

Proposition 5 :

Soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est de classe C^1 sur Ω .
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur Ω .

III . OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DE CLASSE C^1 **a) Combinaisons linéaires et produits :**

Proposition 6 : Soient f et g deux applications d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et α, β deux réels.

Si f et g sont de classe C^1 sur Ω , alors $(\alpha f + \beta g)$ est de classe C^1 sur Ω et

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i} \text{ sur } \Omega.$$

Proposition 7 : Soient f et g deux applications d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et α, β deux réels.

Si f et g sont de classe C^1 sur Ω , alors f, g est de classe C^1 sur Ω et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \text{ sur } \Omega.$$

b) Fonctions composées:

Proposition 8 : Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et g une application d'un ouvert Ω' de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m avec $f(\Omega) \subset \Omega'$. Si f et g sont de classe C^1 respectivement sur Ω et Ω' , alors

$g \circ f$ est de classe C^1 sur Ω et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} \circ f \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ sur Ω .

Corollaire : Sous les hypothèses de la proposition 8, on a l'égalité suivante entre les matrices jacobiniennes : $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$

IV . DIFFEOMORPHISMES ET CHANGEMENT DE VARIABLES

Définition 8 : Soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n sur un ouvert Ω' de \mathbb{R}^n .

On dit que f est un C^1 -difféomorphisme si f est bijective et si les applications f et f^{-1} sont de classe C^1 .

Proposition 9 : Soit f un C^1 -difféomorphisme d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n sur un ouvert Ω' de \mathbb{R}^n . Alors :

- i) f^{-1} est un C^1 -difféomorphisme de Ω' sur Ω .
- ii) $\forall a \in \Omega$, $df(a)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n et son isomorphisme réciproque est : $df^{-1}(f(a))$.
- iii) Entre les matrices jacobiniennes, on a la relation : $J_{f^{-1}}(f(a)) = (J_f(a))^{-1}$

Proposition 10 : (Caractérisation des C^1 -difféomorphismes)

f est un C^1 -difféomorphisme de Ω sur Ω' $\Leftrightarrow \forall a \in \Omega$, $J_f(a)$ est inversible

Proposition 11 :

- i) L'ensemble des C^1 -difféomorphismes est un espace vectoriel.
- ii) La composée de deux C^1 -difféomorphismes est un C^1 -difféomorphisme.

Définition 9 : On dit qu'un changement de variables est admissible si c est un C^1 -difféomorphisme.

V. DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE SUPERIEUR -APPLICATIONS DE CLASSE C^k **a) Dérivées d'ordre supérieur. Théorème de Schwarz :**

Définition 10 : Soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

Pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^k$, on appelle **dérivée partielle d'ordre k** de f , si elle existe, et on

note $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$, la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$ de la fonction $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(f)$.

Théorème 3 : (Théorème de Schwarz)

Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , $a \in \Omega$ et $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$. Si les dérivées

partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont définies au voisinage de a et continues en a , alors elles sont

égales : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

b) Applications de classe C^k :

Définition 11 : Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n et $k \in \mathbb{N}^*$. f est dite de **classe C^k** dans Ω si toutes ses dérivées partielles d'ordre k sont définies et continues sur Ω . f est dite de classe C^∞ sur Ω , si pour tout entier k , f est de classe C^k sur Ω .

Remarque : on a donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \Rightarrow f \notin C^2(a)$

Propriétés 2 : Soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

- **P 2.1** Si f est de classe C^k sur Ω alors, pour tout entier $m \in \llbracket 0, k \rrbracket$, f est de classe C^m sur Ω .
- **P 2.2** L'ensemble des applications de classe C^k de Ω dans \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- **P 2.3** La composée d'applications de classe C^k est une application de classe C^k (sous conditions de compatibilité d'ensembles de définition).

Définition 12 :

Soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p sur un ouvert Ω' de \mathbb{R}^n .

On dit que f est un **C^k -difféomorphisme** si f est bijective de Ω sur Ω' et si les applications f et f^{-1} sont de classe C^k .

Proposition 12 : (caractérisation des C^k -difféomorphismes)

Soit f une application de classe C^k d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n . Si f est un C^1 -difféomorphisme. Alors :

1. f^{-1} est de classe C^k sur Ω .
2. f est un C^k -difféomorphisme sur Ω .

VI . EXTREMA LOCAUX DE FONCTIONS NUMERIQUES**Proposition 13 : (Formule de Taylor-Young)**

Soit f une application de classe C^2 sur une boule ouverte $B(a, r)$ de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} . Alors :

Il existe une quantité $o(\|u\|^2)$, avec $u \in \mathbb{R}^p$, qui vérifie $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{o(\|u\|^2)}{\|u\|^2} = 0$ et telle que :

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \|h\| < r, \text{ on a : } f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2)$$

Définition 13 :

Soient f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} et $a \in \Omega$. On dit que f admet un :

- **Maximum** en a si $\forall x \in \Omega, f(x) \leq f(a)$
- **Minimum** en a si $\forall x \in \Omega, f(x) \geq f(a)$
- **Extremum** en a si f admet un maximum ou un minimum en a

Définition 14 :

Soient f une application de classe C^1 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , $a \in \Omega$. On dit que a est un **point critique** pour f si $df(a) = 0$, ce qui revient à dire que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ sur Ω .

Proposition 14 : (C.N. pour qu'un point soit un extremum)

Soient f une application de classe C^1 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} et $a \in \Omega$.

a est un extremum local pour $f \Rightarrow a$ est un point critique de f

Remarque : la réciproque est fautive.

On se limite à présent au cas $p=2$, on suppose que f est de classe C^2 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et on note :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

Proposition 15 : Soient f une application de classe C^2 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et $a \in \Omega$ un point critique de f . Si $s^2 - rt < 0$, alors f admet un extremum local en a , de plus :

1. si $r < 0$, f admet un maximum local en a ;
2. si $r > 0$, f admet un minimum local en a .