An 8 – Equations différentielles

I. SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES DU 1ère ORDRE

1) Définitions

Soient n un entier non nul et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définitions 1 :

- L'équation différentielle :(L) : $y' - a(t)y = b(t)$

où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, b une application continue de I dans $\mathbb{R}^n$, est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.

- Une **solution** de (L) sera la donnée d'intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $f \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\forall t \in J,\ f'(t) - a(t)(f(t)) = b(t)$$

Remarques :

- On notera S_L l'ensemble des solutions de (L).
- Dans le cas particulier où b = 0, (H) : $a(x)y' - b(x)y = 0$, est appelée **équation homogène**, et l'ensemble des solutions de (H) est noté S_H.

Définition 2 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, A une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{R}^n$.

On appelle **système différentiel linéaire du 1er ordre**, toute équation différentielle de la forme

$$(L) :\ Y' - A(t).Y = B(t)$$
$$\text{ou } (H) :\ Y' - A(t).Y = 0$$

Définitions 3 :

Etant donné un système différentiel linéaire du 1er ordre, on appelle **Problème de Cauchy** relatif au système différentiel et à la donnée initiale $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ la recherche d'une solution du problème :

$$Y' - A(t).Y = B(t) \text{ et } Y(t_0) = Y_0$$

Théorème 1 : ***Théorème de Cauchy-lipschitz linéaire***
Sous les hypothèses de la définition 3, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy admet une solution unique définie sur I, on dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy en (t_0, Y_0).

Théorème 2 (admis): ***Structure de l'ensemble des solutions***
L'ensemble S_H est un espace vectoriel de dimension n et l'ensemble S_L est un espace affine de dimension n, de direction S_H. On a donc : $S_L = Y_p + S_H$ où Y_p est une solution particulière de (L).

Proposition :
Sous les hypothèses de la définition 3; soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de p solutions de (H). Alors son rang est égal à celui de $(f_1(t), \dots, f_p(t))$ dans $\mathbb{R}^n$, et ceci pour tout t de I.

2) Systèmes différentiels à coefficients constants

Il s'agit des systèmes différentiels (L) : $Y' - A.Y = B(t)$ ou (H) : $Y' - A.Y = 0$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{R}^n$.

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 2nd ORDRE

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 1

L'équation différentielle : (L) : $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$, où a , b, c, d sont des applications continues de I (sur lequel a ne s'annule pas) dans $\mathbb{R}$, est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre**.

1) **Système différentiel d'ordre un associé**

On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, aux équations (L) et (H) correspondent les systèmes différentiels :

$$(L_1) : \ Y' - A(t).Y = B(t) \ ; \ (H_1) : \ Y' - A(t).Y = 0$$

$$\text{où } A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^2),\ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c(t)}{a(t)} & -\dfrac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} ;\ B : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{pmatrix}.$$

> **Théorème 1 :**
> Pour tout $(t_0,\ y_0,\ y'_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy admet une solution unique définie sur I, ceci veut dire une solution f sur Y vérifiant $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

> **Théorème 2 :** ***Structure des solutions***
> L'ensemble S_H est en ev de dimension 2, l'ensemble S_L est un espace affine de dimension 2, de direction S_H : $S_L = Y_p + S_H$ où Y_p est une solution particulière de l'équation différentielle (L)

> **Corollaire :** Sous les hypothèses de la définition, soient f_1, f_2 deux solutions de (H). Alors leur rang est égal à celui de $\{f_1(t),\ f_2(t)\}$ dans $\mathbb{R}^2$, et ceci pour tout t de I.

2) **Méthode de la variation des constantes**

Supposons connues deux solutions y_1 et y_2 **indépendantes**, de l'équation (H). Les solutions sur I de (H) s'écrivent donc : $Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $\forall x \in I$.

On considère les constantes C_1 et C_2 comme fonctions de la variable x.

$$\boxed{\textbf{On impose la condition } C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0}$$

On obtient en reportant dans (E) le système $\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = \dfrac{d}{a}(x) \end{cases}$. Ce système est de Cramer, à solution unique $(C'_1,\ C'_2)$. En intégrant, on détermine les fonctions C_1 et C_2.

3) **Méthode ramenant à une équation du 1^er^ ordre**

> **Propriété 2 :** Si φ solution de (H) ne s'annulant pas sur I, alors il existe f solution de (L) de la forme :
> $$f = \lambda\, \varphi, \ \text{avec } \lambda \in C^2(I,\ \mathbb{R}) \text{ qui vérifie } \lambda'' + \lambda'\left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{b}{a}\right) = \frac{d}{a\varphi}.$$
> λ' vérifie une équation différentielle linéaire du 1^er^ ordre que l'on résout, d'où l'on déduit λ.

4) **Utilisation des séries entières** : Si a et b sont DSE sur]-R, R[, alors toute solution de (L) est DSE.

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES DU 1^er^ ORDRE

1. Généralités On ne considère que des équations résolues de la forme $y' = f(t, y)$.

> **Proposition :** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue de U dans $\mathbb{R}$. Alors toute solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est de classe C^1 sur son intervalle de définition.

Définition 1 :

Soit $\varphi \in C^1(I,\ \mathbb{R})$ solution de $y' = f(t, y)$. Le graphe de φ est appelé **Courbe intégrale** associé à φ.

<u>Définition 2</u> : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue de U dans $\mathbb{R}$.
Etant donnée une équation différentielle non linéaire du 1^er^ ordre y' = f(t, y) (*), on appelle **Problème de Cauchy** relatif à l'équation (*) et à la donnée initiale $(t_0, y_0) \in U$ la recherche d'un couple (I, φ), où $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ est solution de (*) sur I et vérifie $\varphi(t_0) = y_0$

<u>Définition 3</u> : On dit que la solution (I, φ) de l'équation différentielle y' = f(t, y) (*) est **maximale** lorsqu'il n'existe pas de solution la prolongeant strictement. Ceci veut dire que pour toute solution (J, ψ) de (*) telle que $I \subset J$ et $\varphi = \psi$ sur I alors I = J.

<u>Définition 4</u> : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. f est dite **localement lipschitzienne par rapport à la 2^e^ variable** si :

$$\forall (t_0, y_0) \in U,\ \exists V_0 \text{ un voisinage de } (t_0, y_0) \text{ dans U et } \exists k>0 \text{ tels que :}$$

$$((t, y), (t, z)) \in (V_0)^2 \Rightarrow \left| f(t,y) - f(t,z) \right| \leq k \left| y - z \right|$$

<u>Théorème 1</u> (admis): ***Théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire***
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue de U dans $\mathbb{R}$ localement lipschitzienne par rapport à la 2^e^ variable. Alors le problème de Cauchy admet une solution unique et maximale définie sur I. On dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy en (t_0, Y_0).

2. <u>Exemples d'équations non linéaires du 1^er^ ordre</u>

a) <u>Equations à variables séparables</u>
On dit que l'équation y' = f(t, y) sur IxJ un produit d'intervalles de $\mathbb{R}$ est à variables séparables si l'on peut écrire f sous la forme f(t, y) = $\dfrac{a(t)}{b(y)}$ avec $a \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $b \in C^1(J, \mathbb{R}^*)$.

b) <u>Equations homogènes en (t, y)</u>
Il s'agit d'une équation différentielle que l'on peut écrire sous la forme y' = $f\left(\dfrac{y}{t}\right)$ pour $t \neq 0$.

c) <u>Equations de Bernoulli :</u> Il s'agit d'une équation différentielle que l'on peut écrire sous la forme :
$y' = a(t)y + b(t)\, y^m$ où a et b sont deux fonctions continues et $m \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

d) <u>Equations de Riccati</u> : Il s'agit d'une équation différentielle que l'on peut écrire sous la forme :
$y' = a(t)y^2 + b(t)\, y + c(t)$ où a , b et c sont des fonctions continues .

3. <u>Intégration numérique</u>

On sait que sous les hypothèses du théorème 1 l'équation y' = f(t, y) possède une solution unique telle que $y(t_0) = y_0$. Cette solution peut s'écrire : $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x,y)dx$. En choisissant un pas d'intégration h et en posant $\begin{cases} t_n = t_0 + nh \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$ on obtient le système : $\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y)dt \end{cases}$.

IV. <u>SYSTEMES AUTONOMES</u>

<u>Définition</u> :
Soit $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ de composantes f et g.

Le système différentiel (S) : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$ est appelé **système autonome** associé à F = (f, g).

Une solution est appelée trajectoire du système autonome.