An 7 – Séries de Fourier

I. SERIES TRIGONOMETRIQUES.

On se place dans le cas où K= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites d'éléments de K.

$\forall t\in\mathbb{R}$, la série $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nt + b_n \sin nt$ est appelée série trigonométrique à coefficients a_n et b_n.

Proposition 1 :

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, l'application : $t\to u_n(t) = a_n\cos nt + b_n\sin nt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodique.

b) Si la série trigonométrique définie précédemment converge pour tout $t\in\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction $\widehat{f}$ telle $\widehat{f}(t) = a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt$, alors $\widehat{f}$ est elle-même 2π-périodique.

c) Si la série trigonométrique converge pour tout $t\in\mathbb{R}$ vers $\widehat{f}$ paire, alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n=0$.

d) Si la série trigonométrique converge pour tout $t\in\mathbb{R}$ vers $\widehat{f}$ impaire, alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$.

Notation particulière dans $\mathbb{C}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}$ avec : $c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}$ et $c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2}$.

Pour que les relations précédentes soient vraies aussi pour n=0 , on pose $c_0 = a_0$.

La série trigonométrique s'écrit alors : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{int}$.

Proposition 2 : Si les séries $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ et $\sum_{n\geq 1}|b_n|$ convergent, alors la série trigonométrique de terme général $u_n(t) = a_n\cos nt + b_n\sin nt$ converge pour tout $t\in\mathbb{R}$.

II. SERIES DE FOURIER.

Définition 2 :

Une fonction f à variable réelle , **2π- périodique** , est dite **continue par morceaux** si elle est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$, c'est-à-dire, s'il existe une subdivision finie $(x_i)_{i\in[1,n]}$ de $[0,2\pi]$, telle que :

- ♦ f continue sur tout intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, $\forall i\in[1, n-1]$.
- ♦ f prolongeable par continuité sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

On notera $f(x^+)$ la limite à droite de f en un point x de la subdivision et $f(x^-)$ la limite à gauche.

Remarques :

- f ne possède donc qu'un nombre fini de discontinuité sur $[0, 2\pi]$.
- f est une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Définition 3 : Soit f une fonction à variable réelle, **2π- périodique**, **continue par morceaux sur** $\mathbb{R}$.

On appelle **série de Fourier associée à f,** la série trigonométrique définie par :

$$\widehat{f}(t) = a_0+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\cos nt + b_n\sin nt$$

Où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$ et $a_0=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés coefficients de Fourier de la fonction f.

Remarques :

- f étant 2π- périodique, on peut intégrer sur tout intervalle $[a, a+2\pi]$.
- Si f est paire, on a : $\forall n\in \mathbb{N}^*$, $b_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ et $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt$.
- Si f est impaire, on a : $\forall n\in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$.
- Les coefficients de Fourier ne changent pas si l'on change la valeur de la fonction aux points de discontinuité.
- $\hat{f}(t) = \sum_{n\geq 0} u_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ où $\forall n\in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

<u>Définition 4 :</u> Soit f une fonction à variable réelle, **2π- périodique**, **continue par morceaux sur $\mathbb{R}$**.

On appelle également <u>série de Fourier associée à f,</u> la série trigonométrique définie par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$.

Les coefficients c_n sont encore appelés coefficients de Fourier de la fonction f.

Remarque : Deux fonctions <u>différentes</u> peuvent avoir la <u>même série de Fourier.</u>

<u>Théorème 1 :</u> Si f est une fonction à variable réelle , 2π- périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients de Fourier convergent vers 0.

III . <u>CONVERGENCE D'UNE SERIE DE FOURIER .</u>

<u>Définition 5 :</u> Une fonction f à variable réelle, 2π- périodique, est dite **de classe C^1 par morceaux** si elle est de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, c'est-à-dire, s'il existe une subdivision finie $(x_i)_{i\in[1,n]}$ de $[0,2\pi]$, telle que :

- ♦ f de classe C^1 sur tout intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, $\forall i \in [1, n-1]$
- ♦ f prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[x_i, x_{i+1}]$.

<u>Théorème 2 :</u> (de Jordan- Dirichlet) .

Soit f une fonction 2π- périodique, définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux .

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier associée à f converge et a pour somme :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \hat{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$

Remarque : Si f est continue en x, alors $\hat{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$.

<u>Définition 6 :</u>

On dit que f est développable en série de Fourier si pour tout $x\in \mathbb{R}$, $f(x) = \hat{f}(x)$.

<u>Théorème 3 :</u> Sous les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet, et si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors les séries numériques $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ et $\sum_{n\geq 1}|b_n|$ convergent.

<u>Théorème 4 :</u> Sous les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet, et si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors :

$\forall (a,b)\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\int_a^b f(t)dt$ s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de f.

IV. GENERALISATION A UNE FONCTION T-PERIODIQUE.

Proposition 3 : Soit g une fonction à variable réelle, T- périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
La série de Fourier associée à g s'écrit $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$, en posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos n\omega t\,dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin n\omega t\,dt$ et $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt$.

V. STRUCTURE D'ESPACE PREHILBERTIEN

Soit $C_T(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, T-périodiques. On définit sur $C_T(\mathbb{R})$ le produit scalaire $<f, g> = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$.

Alors $(C_T(\mathbb{R}), < , >)$ est un espace préhilbertien.

La norme associée à ce produit scalaire est donc : $\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$.

Proposition 4 :
Soit $f \in C_T(\mathbb{R})$, alors : $a_0 = <f, 1>$, $a_n = 2<f, \cos n\omega t>$; $b_n = 2<f, \sin n\omega t>$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in C_T(\mathbb{C})$, alors : $c_n = < e^{-in\omega t}, f >$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, l'espace vectoriel $C_T(\mathbb{C})$ étant munie du produit scalaire hermitien : $<f, g> = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$).

Théorème 5 :
- La famille de fonctions $(t \mapsto 1, (t \mapsto \sqrt{2}\cos n\omega t)_{n\in\mathbb{N}}, (t \mapsto \sqrt{2}\sin n\omega t)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est une base orthonormale de $C_T(\mathbb{R})$.
- La famille de fonctions $(t \to e^{in\omega t})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $C_T(\mathbb{C})$.

Théorème 6 : Inégalité de Bessel.
Soit $f \in C_T(K)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \le \|f\|^2$ $(K = \mathbb{R})$
- $\sum_{k=-n}^{k=n} |c_k|^2 \le \|f\|^2$ $(K = \mathbb{C})$

Remarque : Quand T = 2π, l'inégalité se traduit par $a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt$

Théorème 7 : Formule de Parseval. Soit $f \in C_T(\mathbb{R})$ (resp. $C_T(\mathbb{C})$), on a :
- les séries $\sum_{n\ge 0} a_n{}^2$, $\sum_{n\ge 1} b_n{}^2$ et $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2$ convergent
- $a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$ et $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$