

An 6 – Intégrales dépendant d'un paramètre

On se place dans le cas où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I. CONTINUITÉ

a) Cas d'un segment :

Théorème 1 :

Soit f une fonction à valeurs dans K continue sur $A \times [a, b]$, où A est un intervalle de \mathbb{R} . Alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est continue sur A .

b) Cas d'un intervalle quelconque :

Théorème 2 :

Soit f une fonction à valeurs dans K continue sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de \mathbb{R} , vérifiant les propriétés suivantes :

- La fonction $t \mapsto f(x, t)$ a une intégrale absolument convergente sur I
- $\forall B = [\alpha, \beta] \subset A$, il existe une fonction ϕ , continue, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in B \times I : |f(x, t)| \leq \phi(t) \text{ (hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction g définie par la relation $g(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A .

Conséquence :

Soit f une fonction à valeurs dans K continue sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de \mathbb{R} . S'il existe ϕ , continue, positive et intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in A \times I : |f(x, t)| \leq \phi(t)$, alors la fonction g définie par la relation $g(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A .

II. DERIVATION

a) Cas d'un segment :

Théorème 3 : (Formule de Leibniz)

Soit f une fonction à valeurs dans K continue sur $A \times [a, b]$, où A est un intervalle de \mathbb{R} .

On suppose que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times [a, b]$.

Alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

b) Cas d'un intervalle quelconque :**Théorème 4 :**

Soit f une fonction à valeurs dans K continue sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de \mathbb{R} , vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ a une intégrale absolument convergente sur I .
- $\forall B = [\alpha, \beta] \subset A$, il existe une fonction ϕ , continue, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in B \times I : |f(x, t)| \leq \phi(t) \text{ (hypothèse de domination).}$$
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $A \times I$ satisfaisant les mêmes hypothèses que f .

Alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Conséquence :

Soit f une fonction à valeurs dans K continue sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de \mathbb{R} . S'il existe ϕ et φ , continues, positives et intégrables sur I telles que :

$$\forall (x, t) \in A \times I : |f(x, t)| \leq \phi(t) \text{ et } \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction g définie par la relation $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

III. INTERVERSION D'INTEGRALES**Théorème 5 :** (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction à valeurs dans K continue sur $A \times [a, b]$, où A est un intervalle de \mathbb{R} .

Alors pour tout segment $[c, d] \subset A$: $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, t) dx \right] dt$.