

## An 5 – Séries entières

### I. SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

**Définition 1 :** On appelle *suite de fonctions* toute bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathcal{F} = \{\text{fonctions de } K \text{ dans } K\}$ .

On notera  $\sum f_n$  la série de fonctions associée à  $(f_n)_n$ .

**Définition 2 :**

i) On appelle *somme d'une série de fonctions*  $\sum f_n$  la fonction  $S$ , quand elle existe, définie par :

$$\forall x \in K, \quad S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x).$$

ii) On appelle *somme partielle d'ordre n d'une série de fonctions*  $\sum f_n$  la fonction  $S_n$  définie par :

$$\forall x \in K, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

### II. RAYON DE CONVERGENCE

Dans ce chapitre  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1 :** Soit  $(a_n)_n$  une suite d'éléments de  $K$ .

On appelle *série entière* de la variable  $z \in K$ , à coefficients  $a_n$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

Si  $K = \mathbb{R}$  (resp  $\mathbb{C}$ ), on dit série entière réelle (resp. complexe).

**Théorème 1 :**

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière. Alors,  $\exists ! R \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty[$  /

$$\begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ ACV} \\ |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ DV} \end{cases}$$

**Définition 2 :** Soit  $(a_n)$  une suite de  $K$ . Le  $R$  du Théorème précédent (éventuellement égal à  $+\infty$ ) est appelée *rayon de convergence* de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

**Théorème 2 :** Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

Si, à partir d'un certain rang  $N$ , on a  $|a_n| \leq |b_n|$  alors  $R_a \geq R_b$ .

**Proposition :** Si, à partir d'un certain rang  $N$ , on a  $|a_n| = o(|b_n|)$  alors  $R_a \geq R_b$ .

**Théorème 3 :** Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

Si, au voisinage de l'infini, on a :  $|a_n| \sim |b_n|$ , alors  $R_a = R_b$ .

### III . DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE

**Définition 1 :**

On appelle *disque ouvert de convergence* de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , le disque  $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ .

Si la série est réelle, on dira intervalle (ouvert) de convergence.

**Proposition 1 :** Critère de D'Alembert de calcul du rayon de convergence

Soit une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  existe et vaut  $l$  ( $l$  éventuellement infinie).

- Si  $l = 0$ , alors  $R = \infty$
- Si  $l = \infty$ , alors  $R = 0$
- Si  $l \neq 0$  et  $l \neq \infty$ , alors  $R = \frac{1}{l}$

**Proposition 2 :** Critère de Cauchy de calcul du rayon de convergence

Soit une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existe et vaut  $l$  ( $l$  éventuellement infinie).

- Si  $l = 0$ , alors  $R = \infty$
- Si  $l = \infty$ , alors  $R = 0$
- Si  $l \neq 0$  et  $l \neq \infty$ , alors  $R = \frac{1}{l}$

### IV. OPERATIONS SUR LES SERIES ENTIERES

**Proposition 1 :** (Somme)

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

On appelle somme de ces deux séries, la série  $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ .

Son rayon de convergence est  $R$  et il vérifie  $R \geq \min(R_a, R_b)$ . On a l'égalité si  $R_a \neq R_b$ .

De plus, si  $|z| < R$  alors  $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n$

**Proposition 2 :** (Produit)

On appelle produit des deux séries entières, la série  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$  avec  $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Son rayon de convergence est  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

De plus, si  $|z| < R$  alors  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n = \left( \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{n \geq 0} b_n z^n \right)$ .

### V. CONTINUITÉ

**Théorème :** (Continuité de la somme sur le disque ouvert)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f$ .

La fonction  $f : z \rightarrow f(z)$  est continue dans le disque ouvert de convergence  $D(O, R)$ .

**Propriété :** Supposons qu'il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  sur le cercle de convergence ( c.a.d.  $|z_0| = R$  ) tel que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  converge. Alors  $f(z)$  tend vers  $f(z_0)$  en suivant le rayon  $[0, z_0]$ .

**Corollaire :** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une S.E. à variable réelle, de rayon  $R$ , de somme  $f$ .

Si la série  $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$  converge, alors la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  peut être prolongée par continuité à gauche en  $R$ , en posant  $f(R) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$ .

## VI. DERIVATION ET INTEGRATION D'UNE SERIE ENTIERE REELLE

*Dans ce paragraphe, on ne considère que les séries entières réelles*

**Théorème 1 :** (dérivabilité)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière réelle, de rayon de convergence  $R > 0$ , de somme  $f(x)$ .

Alors  $f$  est dérivable sur  $] -R, R[$  et pour tout  $x \in ] -R, R[$ ,  $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$

Cette série dérivée a le même rayon de convergence que  $f$ .

**Corollaire :** La somme d'une S.E. réelle est de classe  $C^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence.

**Conséquence :**

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière réelle, de  $RC : R > 0$ , de somme  $f(x)$ . Pour tout entier  $n$ ,  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ .

**Proposition :** (unicité des coefficients d'une série entière)

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

On suppose que les sommes de ces deux séries coïncident sur un voisinage de 0. Alors ces deux séries sont identiques :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = b_n$ .

**Conséquence :**

La somme  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est une fonction paire (resp. impaire) si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n+1} = 0$  (resp.  $a_{2n} = 0$ )

**Théorème 2 :** Si la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  a pour somme  $f(x)$  pour tout  $x \in ] -R, R[$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  a le même rayon de convergence et a pour somme  $\int_0^x f(t) dt$  pour tout  $x \in ] -R, R[$ .

## VII. FONCTIONS DEVELOPPABLES EN SERIES ENTIERES

**Définition 1 :** De manière générale, on dit qu'une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est développable en série entière

(DSE) en 0, s'il existe une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  de rayon non nul et un voisinage  $U$  de 0 tel que :

$$\forall z \in U, f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

**Remarque :** Si  $f$  et  $g$  sont DSE en 0, alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(\lambda f + g)$  est DSE à l'origine.

**On se limite dans ce qui suit au cas réel.**

**Définition 2 :** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $K$  de classe  $C^\infty$  à l'origine.

La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  est appelée *série de Mac-Laurin* de  $f$ .

**Propriété :** Si  $f$  est DSE sur un intervalle  $I$  ouvert contenant 0, alors  $f(x)$  coïncide avec sa série de Mac-Laurin.

**Remarque :** Une fonction développable en série entière sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 est de classe  $C^\infty$  sur cet intervalle. **Attention :** la réciproque est fautive.

**Théorème :** (C.N.S. pour que  $f$  soit développable en S.E.).

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0.

Pour que la série de Mac-Laurin,  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ , ait pour somme  $f(x)$  sur  $\Omega$ , il faut et il suffit que son reste de Mac-Laurin tende vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $x \in \Omega$ .

**Remarque :** Il suffit, pour que le résultat du théorème précédent soit vrai, que toutes les dérivées de  $f$  de tout ordre soient bornées.

## VIII. EXPONENTIELLE COMPLEXE.

**Définition :**

La fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est appelée fonction exponentielle complexe. On note  $e^z$ .

**Propriétés 1 :**

- La fonction exponentielle est continue sur  $\mathbb{C}$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ , on a  $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$
- $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

On définit de même les prolongements sur  $\mathbb{C}$  des fonctions sinus et cosinus en posant :

$$\cos z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**Propriétés 2 :**  $\forall z \in \mathbb{C}$ , on a :  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ,  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

**Remarque :** Les formules trigonométriques relatives aux fonctions circulaires directes d'une variable réelle restent valables pour les fonctions circulaires directes d'une variable complexe.