

An 4 – Espaces vectoriels normés

I. Norme sur un espace vectoriel – Distance associée

a) **Norme** : On désigne par E un K -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Définition 1 : On appelle *norme* sur E , toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*définie*)
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*homogénéité*)
3. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*)

Notation : On note généralement la norme de x par $\|x\|$.

Définition 2 :

On appelle *espace vectoriel normé (evn)* tout couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un K -espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Proposition 1 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, alors pour tout couple (u, v) dans E^2 , on a $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

Définition 3 :

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E , on dit que N_1 et N_2 sont *équivalentes* s'il existe deux constantes réelles strictement positives (α, β) telles que : $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$.

Proposition 2 : Sur un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes

b) **Distance associée à une norme** :

Définition 4 :

Soit A un ensemble, on appelle *distance* sur A , toute application $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $(x, y) \in A \times A$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall z \in A, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Le couple (A, d) est appelé *espace métrique*.

Proposition 3 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+ / d(u, v) = \|u - v\|$ est une distance sur E .

Définition 5 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. $\forall a \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+$, on appelle :

1. *boule ouverte* de centre a et de rayon r , l'ensemble $B_o(a, r) = \{x \in E / d(x, a) < r \text{ (ie : } \|x - a\| < r)\}$
2. *boule fermée* de centre a et de rayon r , l'ensemble $B_f(a, r) = \{x \in E / d(x, a) \leq r \text{ (ie : } \|x - a\| \leq r)\}$
3. *sphère* de centre a et de rayon r , l'ensemble $S(a, r) = \{x \in E / d(x, a) = r \text{ (ie : } \|x - a\| = r)\}$

Définition 6 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

$\forall x \in E$, on appelle *voisinage* de x , et on note $\mathcal{V}(x)$, tout sous-ensemble de E qui contient une boule ouverte de centre x et de rayon non nul, ceci se traduit par :

$$\exists r > 0, B(x, r) \subset \mathcal{V}(x).$$

Définition 7 : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé .

1. Un sous ensemble \mathcal{O} de E est dit **ouvert** si :

$\mathcal{O} = \emptyset$ ou lorsque $\mathcal{O} \neq \emptyset$ alors \mathcal{O} est un voisinage de chacun de ses points, ceci se traduit par :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(x, r) \subset \mathcal{O} .$$

2. Un sous ensemble \mathcal{F} de E est dit **fermé** si son complémentaire dans E est un ouvert.

Définition 8 : Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

1. On appelle adhérence de A le plus petit fermé contenant A . On le note \overline{A} .

2. On appelle intérieur de A le plus grand ouvert contenu dans A . On le note $\overset{\circ}{A}$.

3. On appelle frontière de A l'ensemble $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Proposition 4 : Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

1. A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

2. A ouvert $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

Proposition 5 : Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

$$\overline{A} = \{x \in E / \forall r > 0, B_o(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Proposition 6 : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé .

1. La réunion quelconque d'ensembles ouverts est un ouvert.

2. L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

3. La réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.

4. L'intersection quelconque de fermés est un fermé.

II. Limite – Continuité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. **Limite :** On désigne par E un K -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Définition 1 :

Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et (U_n) une suite de E . On dit que (U_n) **converge** dans E si :

$$\exists l \in E / \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow U_n \in B_o(l, \varepsilon))$$

$$\text{i.e. } \exists l \in E / \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \|U_n - l\| \leq \varepsilon)$$

Proposition 1 : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé .

1. La limite d'une suite de E , si elle existe, est unique

2. Toute suite convergente est bornée.

3. $A \subset E$ est un fermé de E ssi toute suite convergente de A converge dans A .

4. $\overline{A} = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n / a_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } (a_n)_n \text{ converge} \right\}$.

Proposition 2 : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé .

Soient $U = (U_n)_n$ et $V = (V_n)_n$ deux suites de E , on considère les opérations suivantes sur E :

$$U + V = (U_n + V_n)_n ; \forall \lambda \in K, \lambda U = (\lambda U_n)_n .$$

Si les deux suites sont convergentes, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda U_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$$

Définition 2 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $D \subset E$, $f : D \rightarrow F$ et $a \in D$.

On dit que f admet une **limite** ℓ en a et on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / f(B_\eta(a) \cap D) \subset B_\varepsilon(\ell)$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in D, (\|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon)$

Proposition 3 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $D \subset E$ et $f : D \rightarrow F$. Soit $a \in D$.

La limite de f en a , si elle existe, est unique.

Proposition 4 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $D \subset E$ et $f : D \rightarrow F$. Soit $a \in D$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall (x_n)_n \in D, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell)$$

b. Continuité :

Définition 3 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $D \subset E$, $f : D \rightarrow F$ et $a \in D$.

1. on dit que l'application f est **continue en a** si f admet $f(a)$ pour limite en a .

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / f(B_\eta(a) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(a))$.

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in D, (\|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon)$.

2. on dit que l'application f est **continue** sur D si f est continue en tout point de D .

Proposition 5 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $D \subset E$ et $f : D \rightarrow F$. Soit $a \in D$.

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow (\forall (u_n)_n \in D, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a))$$

Proposition 6 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $D \subset E$ et $f : D \rightarrow F$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur D .
2. l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de D .
3. l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de D .

Proposition 7 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $D \subset E$ et $f : D \rightarrow F$.

Si f est continue, alors l'image d'un fermé borné de D est un fermé borné de F .

Proposition 8 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$.

Si f est linéaire, alors f est continue.

Proposition 9 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{D} \subset E$ et $f : \mathcal{D} \rightarrow F$. On a :

1. Si f est continue sur \mathcal{D} , alors $\|\cdot\| : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \|\cdot\| : x \rightarrow \|f(x)\|$ est continue sur \mathcal{D} .
2. Si f et g sont continues sur \mathcal{D} , alors $f + g$ est continue sur \mathcal{D} .
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est continue sur \mathcal{D} , alors λf est continue sur \mathcal{D} .

Proposition 10 : Soient $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ et $(G, \|\cdot\|)$ trois espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ et

$g : F \rightarrow G$. Soit $a \in E$. Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Remarque : Si E et F evn et $f : E \rightarrow F$ bijective et continue, alors f^{-1} n'est pas forcément continue.

Définition 4 :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$.

Si f et f^{-1} sont continues, alors on dit que f est un **homéomorphisme**.