An 2 – Séries numériques

1 Introduction

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) Soit $\forall$ $p\in\mathbb{N}$, $S_p = \sum_{i=0}^{p} u_i$. S_p est appelée <u>somme partielle</u> de la série de terme général u_n. On notera $\Sigma\, u_n$ pour la <u>série de terme général</u> u_n.
ii) On dira que $\Sigma\, u_n$ <u>converge</u> si S_n admet une limite en l'infini.
Sinon on dira que $\Sigma\, u_n$ <u>diverge.</u>
iii) On appellera <u>somme</u> de la série $\Sigma = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, quand elle existe.

Théorème 1 : Si la série de terme général u_n converge, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse.

Théorème 2 : On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Théorème 3 :
Soient λ un réel non nul et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que l'on ait : $w_n = u_n + v_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) Si les séries de terme général $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, alors celle de terme général $(w_n)_n$ converge également.
ii) Si l'une des deux séries converge et l'autre diverge, alors celle de terme général $(w_n)_n$ diverge.
iii) Si les séries de terme général $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ divergent, alors on ne sait rien sur celle de terme général $(w_n)_n$.
iv) Les séries de terme général $(u_n)_n$ et $(\lambda.u_n)_n$ sont de même nature.

2 Critères de convergence des séries à termes positifs

Définition :

Σu_n est appelée <u>série à termes positifs</u> si u_n est positif à partir d'un certain rang.
i.e : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq 0$.

Proposition : A partir d'un certain rang, la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante.

Remarque : Pour montrer sa convergence il suffit de montrer qu'elle est bornée.

Thm. 1 : Méthode de comparaison
Soient Σu_n et Σv_n deux séries à termes positifs telles que :
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$.
i) Si la série de terme général v_n converge, alors celle de terme général u_n converge également.
ii) Si la série de terme général u_n diverge, alors celle de terme général v_n diverge également.

Conséquence : Soient Σu_n et Σv_n deux séries à termes positifs telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}.$$

i) Si cette limite est non nulle, alors les deux séries sont de même nature.
ii) Si $l = 0$ et si Σv_n converge, alors Σu_n converge.

Théorème 2 :

i) Séries géométriques : $u_n = r^n$ où $r > 0$.

$$0 \le r < 1 \Rightarrow \Sigma u_n \text{ CV}$$
$$r \ge 1 \Rightarrow \Sigma u_n \text{ DV}$$

ii) Séries de Riemann : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha > 1 \Rightarrow \Sigma u_n \text{ CV}$$
$$\alpha \le 1 \Rightarrow \Sigma u_n \text{ DV}$$

Théorème 3 : Critère de D'Alembert

Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L \in \mathbb{R}.$$

i) $L < 1 \Rightarrow \Sigma u_n$ CV.
ii) $L > 1 \Rightarrow \Sigma u_n$ DV.
iii) $L = 1 \Rightarrow$?

Théorème 4 : Critère de Cauchy.

Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L \in \mathbb{R}.$$

i) $L < 1 \Rightarrow \Sigma u_n$ CV.
ii) $L > 1 \Rightarrow \Sigma u_n$ DV.
iii) $L = 1 \Rightarrow$?

Théorème 5 : Comparaison aux séries de Riemann.

Soit Σu_n une série à termes positifs.
i) Si on sait trouver $\alpha > 1$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n$ existe, alors Σu_n converge.
ii) Si on sait trouver $\alpha \le 1$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n$ existe $\neq 0$, alors Σu_n diverge.

Théorème 6 : Méthode du groupement des termes.

Soient Σu_n une série à termes positifs et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante / $\varphi(0) = 0$. On définit la série Σv_n par :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 + \dots + u_{\varphi(1)-1} \\ v_1 &= u_{\varphi(1)} + \dots + u_{\varphi(2)-1} \\ &\vdots \\ v_n &= u_{\varphi(n)} + \dots + u_{\varphi(n+1)-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Alors les séries Σu_n et Σv_n sont de même nature et de même somme, si elles convergent.

3 Séries à termes de signes quelconques

Définition : Si la série de terme général ($|u_n|$) converge, alors on dit que Σu_n est absolument convergente.

Théorème 1 : $CVA \Rightarrow CV$

Notation : Soit $a \in \mathbb{R}$. On note : $a^+ = \max(a; 0)$ et $a^- = \max(-a; 0)$.

Proposition : $\forall a \in \mathbb{R}$, on a : $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$

Théorème 2 : La série de terme général (u_n) est ACV si et seulement si les séries de termes généraux (u_n^+) et (u_n^-) sont convergentes.

Théorème 3 : Règle d'Abel

Soit une série de terme général $u_n = \varepsilon_n v_n$ telle que :
i) $(\varepsilon_n)_n$ suite de termes positifs qui tend vers 0 en décroissant.
ii) Les sommes partielles de la série de terme général (v_n) sont bornées.
Alors la série de terme général (u_n) converge.

Théorème 4 : Séries alternées

Si Σu_n est une série alternée telle que $(|u_n|)_n$ tende vers 0 en décroissant, alors elle est convergente.

4 Propriétés des séries

Théorème 1 : Changement d'indice

Soient (u_n) le terme général d'une série ACV et $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.
On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = u_{\alpha(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Alors la série de terme général v_n est convergente et a même somme que la série de terme général u_n.

Théorème 2 : Produit de deux séries

Si (u_n) et (v_n) sont les termes généraux de deux séries ACV de sommes respectives S et S', alors la série de terme général ($w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$) est CV de somme S.S'.

Théorème 3 : Approximation d'une série alternée.

Soit une série alternée Σx_n vérifiant les hypothèses du thm. 4.

Si l'on prend pour valeur approchée de la somme Σ de cette série la somme partielle S_n de rang n, on commet une erreur $\Sigma - S_n$ du signe de x_{n+1} et dont la valeur absolue est majorée par $|x_{n+1}|$.