An 1 - Suites

1 Suites dans $\mathbb{Q}$:

Définition :

i) Une <u>suite</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres irrationnels est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. u : $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

ii) La Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge</u> vers $l \in \mathbb{Q}$ si :

$\forall$ (a, b) $\in \mathbb{Q}^2$ / a < l < b, à partir d'un certain rang, $u_n \in$]a, b[.

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

iii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une <u>suite de Cauchy</u> si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $n, p > n_0 \Rightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon$.

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $n > n_0$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow |u_n - u_{n+p}| < \varepsilon$.

Théorème : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors cette suite est une suite de Cauchy.

Remarque : La réciproque est fausse dans $\mathbb{Q}$, d'où la création de $\mathbb{R}$ pour que le critère de Cauchy fonctionne.

2- Propriétés de $\mathbb{R}$:

Proposition 1 :

i) $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont des groupes.
ii) $\mathbb{R}$ est ordonné.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$.

M est un <u>majorant</u> de A (resp. <u>minorant)</u> si $\forall$ a $\in$ A, a $\leq$ M (resp. a $\geq$ M).
Si M est un majorant (resp. minorant) de A et si M$\in$A, alors M est un plus grand élément (ou maximum) de A (resp. plus petit élément ou minimum).

Proposition 2:

i) Si A est une partie finie de $\mathbb{R}$, alors A admet un plus grand élément et un plus petit élément.

ii) Si A est une partie infinie de $\mathbb{R}$ admettant un majorant, alors A n'a pas forcément un plus grand élément.

Définition :

Soit A une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. On appelle <u>borne supérieur</u> de A (resp. borne inf.) le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants).

Proposition 3 :

Soit A une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.
M = Sup(A) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / M - \varepsilon < x \leq M$
(Resp. m = Inf(A) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / M \leq x < M + \varepsilon$)

Théorème 1: Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieur.

Théorème 2: $\mathbb{R}$ est complet (i.e. suite convergente $\Leftrightarrow$ suite de Cauchy).

3- Suites dans $\mathbb{R}$:

Théorème 1 : Toute suite convergente est bornée.

Théorème 2: Dans $\mathbb{R}$, une suite croissante et majorée est convergente, de limite l qui vaut : $\sup\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$.

Définition :

Soient f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. On appelle suite récurrente une suite définie par:

$$\begin{cases} u_1 = f(u_0) \\ \quad \vdots \\ u_n = f(u_{n-1}) = f^n(u_0) \end{cases}$$

Théorème 3 : Soient f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Théorème 4 : Si f est continue et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors f(l) = l.

Définition :

Soient u = $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et φ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
On construit la suite v définie par : $v_k = u_{\varphi(k)}$, $\forall$ k $\in \Delta_n$.
La suite v est dite suite extraite ou sous-suite de u.

Théorème 5 : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite l, alors toutes les suites extraites sont convergentes de limite l.

Théorème 6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite / la suite extraite de rang paire converge et la suite extraite de rang impaire converge vers la même limite.
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite.