

INTEGRALES MULTIPLES

1. PARTIES QUARRABLES DE \mathbb{R}^2

1.1 Pavés

Définition :

- On appelle **pavé fermé borné** de \mathbb{R}^2 toute partie P de \mathbb{R}^2 telle qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ / $P = [a,b] \times [c,d]$.
- On appelle **intérieur** de P et on note $\overset{\circ}{P}$ la partie de \mathbb{R}^2 : $\overset{\circ}{P} =]a, b[\times]c, d[$.

Définition : On appelle **aire** du pavé fermé borné $P = [a,b] \times [c,d]$ le réel :

$$\mathcal{A}(P) = |b - a| \times |d - c|.$$

1.2 Parties pavables de \mathbb{R}^2

Définition :

- On appelle **partie pavable** de \mathbb{R}^2 toute réunion d'un nombre fini de pavés fermés bornés de \mathbb{R}^2 .
- On dit que 2 pavés sont quasi-disjoints si l'intersection de leurs intérieurs est vide.

Proposition-définition : Soient B une partie pavable de \mathbb{R}^2 et P_1, P_2, \dots, P_n des pavés fermés bornés quasi-disjoints tels que $B = \bigcup_{i=1}^n P_i$, alors : $\sum_{i=1}^n \mathcal{A}(P_i)$ ne dépend pas du choix de P_1, P_2, \dots, P_n . Ce réel est appelé **aire** de B . On le note $\mathcal{A}(B)$.

1.3 Parties quarrables

Définition : Soit D une partie **bornée** de \mathbb{R}^2 . On note :

$\mathcal{A}^-(D)$ la borne supérieure des aires des parties pavables de \mathbb{R}^2 contenues dans D .

$\mathcal{A}^+(D)$ la borne inférieure des aires des parties pavables de \mathbb{R}^2 contenant D .

On dit que D est **quarrable** si $\mathcal{A}^-(D) = \mathcal{A}^+(D)$.

La valeur commune est appelée aire de D et notée $\mathcal{A}(D)$.

Une partie D de \mathbb{R}^2 telle que $\mathcal{A}(D) = 0$ est dite **négligeable**.

Remarque : $\mathcal{A}(D) = 0$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie pavable B de \mathbb{R}^2 telle que : $D \subset B$ et $\mathcal{A}(B) < \varepsilon$.

Proposition :

- i) Toute courbe finie de \mathbb{R}^2 de **classe C^1** par morceaux est quarrable et négligeable.
- ii) Toute partie bornée de \mathbb{R}^2 limitée par une courbe de classe C^1 par morceaux est quarrable.
- iii) Soient D_1 et D_2 2 parties quarrables de \mathbb{R}^2 . Alors $D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2$ sont quarrables et : $\mathcal{A}(D_1 \cup D_2) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2) - \mathcal{A}(D_1 \cap D_2)$.

2. INTEGRALE DOUBLE

2.1 Définition, propriétés Soient D une partie quarrable de \mathbb{R}^2 et f une fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} définie sur D . On définit l'intégrale de f sur D de la même façon que dans le cas d'une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . On la note $\iint_D f(x,y) dx dy$.

Interprétation géométrique :

- Si $f \geq 0$ sur D , alors $\iint_D f(x, y) dx dy$ représente le volume de la partie E de \mathbb{R}^3 définie par : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.
- $\iint_D dx dy = \mathcal{A}(D)$.

Proposition 1 : Toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur une partie quarrable D de \mathbb{R}^2 est intégrable sur D .

Proposition 2 : additivité

Si $D_1 \cap D_2$ est d'aire nulle alors $\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$

Proposition 3 : linéarité

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Proposition 4 : positivité et croissance

- i) Si $f \geq 0$ sur D alors $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$.
- ii) Si $f \leq g$ sur D alors $\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$.
- iii) $\mathcal{A}(D) \inf_D f \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \mathcal{A}(D) \sup_D f$.
- iv) $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$.

Proposition 5 : inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g intégrables sur une partie quarrable D de \mathbb{R}^2 . Alors :

$$\left(\iint_D fg \right)^2 \leq \left(\iint_D f^2 \right) \left(\iint_D g^2 \right).$$

Proposition 6 : effet d'une symétrie

Soit D une partie quarrable de \mathbb{R}^2 de la forme $D = \Delta \cup s(\Delta)$ avec s symétrie et $\Delta \cap s(\Delta)$ d'aire nulle.

Alors : si $f(s(M)) = f(M)$ pour tout $M(x, y) \in D$ alors $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$

si $f(s(M)) = -f(M)$ pour tout $M(x, y) \in D$ alors $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$

2.2 Théorème de Fubini

Théorème : Soient a et b 2 réels ($a < b$), y_1 et y_2 2 fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant $y_1 \leq y_2$ sur $[a, b]$ et D le domaine défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Si f est continue sur D alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Remarque : si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq y \leq b \text{ et } x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$ alors on a :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

Corollaire : Soient a, b, c, d 4 réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, $D = [a,b] \times [c,d]$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$

Remarque : (cas particulier) si de plus $f(x,y) = u(x)v(y)$ avec u continue sur $[a,b]$ et v continue sur $[c,d]$ alors :

$$\iint_D u(x)v(y) dx dy = \left(\int_a^b u(x) dx \right) \left(\int_c^d v(y) dy \right).$$

2.3 Changement de variables dans une intégrale double

Définition : Soient U et V 2 ouverts de \mathbb{R}^2 et $\varphi : U \rightarrow V$ telle que

$$\forall (x,y) \in U, \varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

On dit que φ est de **classe C^1** sur U si P et Q sont de classe C^1 sur U .

On appelle **matrice jacobienne** de φ sur U la matrice

$$J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

On appelle **jacobien** ou **déterminant jacobien** de φ le déterminant de $J_\varphi(x,y)$.

Théorème : Soient U et V 2 ouverts de \mathbb{R}^2 , $\varphi : U \rightarrow V$ de classe C^1 , D et Δ deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2 / D \subset U$, $\Delta \subset V$ et $\varphi(D) = \Delta$. On suppose de plus que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents est négligeable.

Si $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue alors :

$$\iint_\Delta f(x,y) dx dy = \iint_D f(\varphi(u,v)) |\det(J_\varphi(u,v))| du dv.$$

Applications :

- **Passage en polaires :** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \varphi(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

Alors : $J_\varphi(x,y) = \rho$. On prendra $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

- **Coordonnées elliptiques :** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \varphi(\rho, \theta) = (a \rho \cos \theta, b \rho \sin \theta)$.

Alors : $J_\varphi(x,y) = ab \rho$.

3. INTEGRALE TRIPLE

L'étude est similaire à celle de l'intégrale double, l'intégrale triple vérifie les mêmes propriétés avec :

- **Cubable** remplace quarrable.
- $\iiint_D dx dy dz$ donne le **volume** de D .
- Géométriquement : il s'agit d'un flux.

Théorème de Fubini : Soit f continue et bornée sur une partie cubable D de \mathbb{R}^3 .

i) Si D est un pavé $D = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} \left[\int_b^{b'} \left(\int_c^{c'} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

ii) **Intégration par piles** : cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in d \text{ et } u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$ où d partie quarrable de \mathbb{R}^2 , u et v applications continues de $d \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_d \left[\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

iii) **Intégration par tranches** : cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq z \leq b, (x, y) \in D(z)\}$ avec $D(z)$ partie quarrable de \mathbb{R}^2 pour tout $z \in [a, b]$:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{d(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

Changement de variables : le théorème est identique à celui des intégrales doubles.

Exemples dans l'espace euclidien orienté muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- **Passage en coordonnées cylindriques** :

On appelle **système de coordonnées cylindriques** d'un point $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un triplet (ρ, θ, z) où (ρ, θ) est un système de coordonnées polaires de m projection orthogonale de M sur le plan (xOy) . On obtient :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{dans ce cas } J_\varphi(x, y, z) = \rho.$$

Remarques :

- En passant en coordonnées **cylindriques** dans une intégrale triple on remplace $dx dy dz$ par $|\rho| d\rho d\theta dz$.
- En général on prend $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

- **Passage en coordonnées sphériques** :

On appelle **système de coordonnées sphériques** d'un point $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, un triplet (ρ, θ, φ) où $\rho = OM$ et θ est l'angle polaire de m projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) (orienté directement) et φ est l'angle (\vec{k}, \vec{OM}) :

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{Alors : } J_\varphi(x, y, z) = -\rho^2 \sin \varphi$$

Remarques :

- en passant en coordonnées **sphériques** dans une intégrale triple on remplace : $dx dy dz$ par $\rho^2 |\sin \varphi| d\rho d\theta d\varphi$.
- En général on prend $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \pi]$ car ainsi $\sin \varphi \geq 0$.