

FONCTIONS de 2 VARIABLES REELLES

1. ESPACE \mathbb{R}^2

1.1 Normes usuelles

Définition : On appelle norme sur \mathbb{R}^2 toute application $\| \cdot \|$ de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R} telle que :

- (1) $\| X \| = 0 \Rightarrow X = 0$
- (2) $\| \lambda X \| = |\lambda| \| X \| \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (3) $\| X+Y \| \leq \| X \| + \| Y \| \quad \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

Proposition :

- i) $\| 0_{\mathbb{R}^2} \| = 0$
- ii) $\forall X \in \mathbb{R}^2, \| X \| \geq 0$
- iii) $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \| X-Y \| \geq | \| X \| - \| Y \| |$

Définition :

- On appelle distance associée à la norme $\| \cdot \|$, l'application d de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ vers \mathbb{R}_+ définie par $d(X, Y) = \| X - Y \|$.
- On dit qu'une partie A de \mathbb{R}^2 est bornée pour la norme $\| \cdot \|$ si l'ensemble $N(A)$ défini par $N(A) = \{ \| X \|, Y \in A \}$ est une partie bornée de \mathbb{R}_+ .

Théorème 1 : (normes usuelles) Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$\begin{aligned} \| X \|_1 &= |x_1| + |x_2| \\ \| X \|_2 &= (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \| X \|_\infty &= \text{Max}(|x_1|, |x_2|). \end{aligned}$$

Les applications $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{R}^2 ($\| \cdot \|_2$ est appelée norme euclidienne).

Remarque : ces définitions s'étendent à \mathbb{R}^3 , et plus généralement à \mathbb{R}^n ($n \geq 2$).

Définition : On dit que 2 normes N et N' définies sur \mathbb{R}^2 sont équivalentes si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 / \forall X \in \mathbb{R}^2, \alpha N(X) \leq N'(X) \leq \beta N(X). \quad \text{On note alors : } N \sim N'$$

Remarque : \sim est une relation d'équivalence.

Théorème 2 : les 3 normes usuelles sur \mathbb{R}^2 sont équivalentes.

1.2 Parties ouvertes de \mathbb{R}^2

Définition : Soient $a \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\| \cdot \|$ une norme sur \mathbb{R}^2 . On appelle :

Boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble $B_o(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^2, \| x - a \| < r \}$.

Boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble $B_f(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^2, \| x - a \| \leq r \}$.

Sphère de centre a et de rayon r l'ensemble $S(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^2, \| x - a \| = r \}$.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On dit que **A est une partie ouverte de \mathbb{R}^2** si :

$$\forall x \in A, \exists r > 0 \text{ tel que } B_o(x, r) \subset A.$$

Remarques :

- Toute boule ouverte est un ouvert.
- Une partie ouverte pour une norme l'est aussi pour les autres normes usuelles.

2. FONCTIONS de 2 VARIABLES

2.1 Limites d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Définition : Soit f une application définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} .

On dit que f a pour limite L ($L \in \mathbb{R}$) en a ($a \in \mathbb{R}^2$) si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

Remarques :

- La notion est indépendante de la norme choisie.
- La limite, si elle existe, est unique.
- Les propriétés des limites des fonctions d'une variable réelle peuvent s'étendre aux fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (encadrement, ...).

2.2 Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Définition : Soient f une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} et $a \in U$.

On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarque : f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Définition : Soit f une application d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} .

On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point de U .

Proposition 1 : Soient f et g 2 fonctions continues sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} .

$f + g, \lambda f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $f \cdot g$ sont continues sur U .

Si g ne s'annule pas sur U , f/g est continue sur U .

2.3 Continuité partielle

Définition :

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y).$$

- On définit $f(\cdot, b)$ l'application partielle définie sur l'ensemble A des réels x tels que $(x, b) \in U$ par : $x \mapsto f(x, b)$ (y est fixé, on obtient une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} de variable x).
- On définit $f(a, \cdot)$ l'application partielle définie sur l'ensemble B des réels y tels que $(a, y) \in U$ par : $y \mapsto f(a, y)$.

Proposition 2 : Si f est continue en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors les fonctions partielles sont continues aux points correspondants.

Remarque : la continuité des applications partielles n'implique pas la continuité.

2.4 Fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, limites et continuité

Définition : Soit f une application d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 .

- On dit que f admet L ($L \in \mathbb{R}^2$) pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in U \quad \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$$
- On dit que f est continue en a , $a \in U$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in U \quad \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Remarque : on peut étendre ces définitions à f application de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^p .

Théorème 3 : Soit f une application d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 de la forme :

$$x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$$

- i) f admet $L = (L_1, L_2)$ pour limite en a si et seulement si $\lim_a f_1 = L_1$ et $\lim_a f_2 = L_2$.
- ii) f continue en $a \in U$ si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en a .

Théorème 4 : toute application linéaire de \mathbb{R}^p sur \mathbb{R}^q est continue ($p \geq 1, q \geq 1$).

Proposition 3 : (composition) Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ avec f continue en a et g définie au voisinage de $f(a)$ et continue en $f(a)$. Alors : $g \circ f$ est continue en a .

Remarque : on utilise alors souvent le changement de variables $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ qui est continue sur \mathbb{R}^2 pour montrer la continuité en $(0, 0)$.

3. DERIVEES PARTIELLES de FONCTIONS de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

3.1 Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Définition : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On dit que f admet une **dérivée en a suivant le vecteur h** si :

$$\varphi_h : t \mapsto f(a + th) \text{ est dérivable en } 0.$$

Alors $\varphi_h'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + th) - f(a))$ est appelé dérivée de f en a suivant le vecteur h .

On note $D_h f(a) = \varphi_h'(0)$.

Définition : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- On appelle **dérivée partielle** de f par rapport à la première (resp. deuxième) variable en a , si elle existe, la dérivée de f en a suivant le vecteur $(1,0)$ (resp. $(0,1)$).
- On les note $D_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $D_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Remarque : sous réserve d'existence, pour $a = (\alpha, \beta)$:

$$D_1 f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\alpha + t, \beta) - f(\alpha, \beta)) = (f(\cdot, \beta))'(\alpha)$$

Définition : On appelle fonctions dérivées partielles les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ définies sur une partie de U et à valeurs dans \mathbb{R} .

3.2 Applications de classe C^1

Définition : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées suivant tout vecteur h .

Si, pour tout vecteur h , $x \mapsto D_h f(x)$ est continue sur U , alors on dit que **f est de classe C^1 sur U** .

Théorème 5 : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet des dérivées partielles **continues** sur U alors f est de classe C^1 sur U .

Théorème 6 : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U et $a = (a_1, a_2) \in U$.

i) Il existe une application ε de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|(h_1, h_2)\| \varepsilon(h_1, h_2)$$

$$\text{avec } \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h_1, h_2) = 0.$$

On dit que **f admet un développement limité d'ordre 1 en a** .

ii) f admet une dérivée selon tout vecteur h et : $D_h f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Corollaire : si f est de classe C^1 sur U alors f est continue sur U .

Définition : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur U pour tout a de U , l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(h_1, h_2) \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

est appelée **application linéaire tangente à f en a** , ou **différentielle de f en a** et notée **$d_a f$** ou **$df(a)$** .

Notation : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Définition : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et f une application de classe C^1 sur U .

On appelle **gradient de f** le vecteur : $\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

Remarque : dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 on a : $D_h f(a) = df(a)(h) = (\text{grad } f(a) | h)$.

Proposition 4 : (propriétés algébriques)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , f et g de U dans \mathbb{R} de classe C^1 sur U . Alors :

$f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), f/g sont de classe C^1 sur U .

Si g ne s'annule pas sur U , f/g est de classe C^1 sur U .

Remarques : $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$ et $\text{grad}(f/g) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$.

Proposition 5 : (composition)

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^2 , u et v 2 applications de I dans \mathbb{R}^2 de classe C^1 sur I telles que $\forall t \in I, (u(t), v(t)) \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U .

Alors $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(u(t), v(t))$ est de classe C^1 sur I

$$\text{et } \forall t \in I, g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)).$$

Proposition 6 : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et g application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} définie par $g(t_1, t_2) = f(x(t_1, t_2), y(t_1, t_2))$. Si f, x et y sont de classe C^1 alors g est de classe C^1 et

$$\frac{\partial g}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial t_i} \quad i \in \{1, 2\}.$$
3.3 Extremum

Définition : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un **maximum local** en a si : $\exists r \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in B(a, r), f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **maximum local strict** en a si : $\exists r \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in B(a, r) \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$.

Remarque : de même pour un minimum.

Théorème 6 : Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a et des dérivées partielles en a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

Définition : Lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ on dit que a est un **point critique**.

4. DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE $k \geq 2$

Par récurrence on définit : $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right)$ pour $k \geq 2$.

Définition : On dit que f est de classe C^k sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 si pour tout système de k indices (i_1, i_2, \dots, i_k) pris dans $\{1, 2\}$ la dérivée partielle $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}$ existe et est continue.

Remarques :

- i) On dit que f est de classe C^∞ sur U si f est de classe C^k sur U pour tout $k \geq 2$.
- ii) Si f et g sont de classe C^k sur U , alors : $f + g, fg$ et λf sont de classe C^k sur U .

Théorème 7 : Schwarz

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U .

$$\text{Alors : } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$