EQUATIONS DIFFERENTIELLES (compléments)

1. DEFINITIONS

Définition :

- On appelle équation différentielle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) une équation de la forme :$f(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$ où y est une fonction (inconnue) de la variable réelle x, à valeurs dans **K** avec **K** = $\mathbb{R}$ ou **K** = $\mathbb{C}$.
- On appelle solution d'une équation différentielle sur un intervalle I toute fonction φ n fois dérivable sur I telle que $\forall x \in I$, $f(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x))=0$.
- Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle c'est chercher l'ensemble des solutions.
- On appelle courbe intégrale la courbe définie par $y = \varphi(x)$ où φ est une solution.
- Cas particulier : équation $y' = f(x,y)$, les courbes intégrales ont en chacun de leurs points une tangente de coefficient directeur $f(x,y)$.

2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES du 1° ORDRE

2.1 Définitions

- Soient a, b, c des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle équation différentielle linéaire du 1° ordre , toute équation de la forme :
$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$
- Lorsque l'on a $y' = a(x)y + b(x)$ on dit que l'équation est **« sous forme normale »**.

2.2 Résolution de l'équation y' = a(x)y

Théorème 1 : Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans **K** (K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
L'ensemble S_H des solutions de H : $y' = a(x)y$ est un espace vectoriel sur **K** et :
$$S_H = \{ f : I \to \mathbf{K} , x \mapsto \lambda\, e^{\int a(x)dx} , \lambda \in \mathbf{K} \}.$$

2.3 Résolution d'une équation complète (avec second membre)

Soient a et b 2 fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans **K.**

E : $y' = a(x)y + b(x)$	S l'ensemble des solutions de E sur I
H : $y' = a(x)y$	S_H ------------------------ H sur I

Théorème 2 : la solution générale de E est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre H et d'une solution particulière de l'équation complète E.

2.4 Méthode de la variation de la constante

Méthode : h étant une solution de l'équation sans second membre associée à $y' = a(x)y + b(x)$ on cherche une fonction λ telle que λh soit une solution de l'équation complète. On est ainsi ramené à un calcul de primitives.

2.5 Equation avec conditions initiales

Proposition : Soient a et b 2 fonctions continues de I vers **K ,** $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{K}$. L'équation $y' = a(x)y + b(x)$ admet une solution unique f vérifiant $f(x_0) = y_0$.

3. EQUATIONS à VARIABLES SEPARABLES, HOMOGENES

3.1 Equations à variables séparables

Equations de la forme $a(x) = y'b(y)$:
on remarque que $y'b(y) = (B(y))'$ où B est une primitive de b.

3.2 Equations homogènes

Equations de la forme $f(\frac{y}{x}, y') = 0$.
On pose alors $\mathbf{y = tx}$ ($t : x \rightarrow t(x) = y(x)/x$).
On se ramène ainsi à une équation à variables séparables.