

INTEGRATION sur un segment, PRIMITIVES

1. FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

1.1 Fonctions en escalier

Définition : On appelle **subdivision** d'un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} ($a < b$) toute suite finie $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de points de $[a, b]$ vérifiant : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Remarque : on dit que $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est une subdivision régulière de $[a, b]$ lorsque

$$a_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Définition : Soit φ une application de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On dit que φ est une **fonction en escalier** sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall x \in]a_k, a_{k+1}[\quad \varphi(x) = \lambda_k$.

Remarque : lorsque φ est ainsi constante sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ on dit que la subdivision s est adaptée à φ (ou subordonnée à φ)

Théorème 1 : L'ensemble $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel et un anneau commutatif.

1.2 Fonctions continues par morceaux

Définition : Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ ($a < b$).

On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision

$s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que :

$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et admet une limite finie à droite en a_k et à gauche en a_{k+1} .

Remarque : l'ensemble CM des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un sous espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des applications de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Théorème 2 : Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe φ, ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

2. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème-définition : Soient φ une fonction en escalier sur un segment $[a, b]$ et $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à φ telle que : $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in]a_i, a_{i+1}[\quad \varphi(x) = \lambda_i$,

Le réel $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \lambda_i$ ne dépend pas de la subdivision s adaptée à φ choisie ;

ce réel est appelé **intégrale** de φ sur $[a, b]$ et est noté :

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \lambda_i \quad \text{on peut aussi noter} \quad \int_a^b \varphi \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} \varphi.$$

Remarque : Interprétation géométrique

$\int_a^b f$ représente une somme d'aires algébriques de rectangles dans un repère orthonormé.

Proposition 1 : (relation de Chasles)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ alors : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Proposition 2 : (linéarité)

Soient f et g 2 fonctions en escalier sur $[a, b]$. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Proposition 3 : (positivité)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ ($a \leq b$) telle que $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

Alors : $\int_a^b f \geq 0$

Proposition 4 : (comparaison)

Soient f et g 2 fonctions en escalier sur $[a, b]$ ($a \leq b$) telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$.

Alors : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème-définition : Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ ($a < b$),

$\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$,

$E^-(f) = \{ \int_a^b \varphi / \varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f \}$ et $E^+(f) = \{ \int_a^b \varphi / \varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \geq f \}$.

Alors $\sup(E^-(f)) = \inf(E^+(f))$ et cette valeur est appelée **intégrale de f sur $[a, b]$** .

Remarque : l'intégrale de f sur $[a, b]$ représente l'aire *algébrique* de la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = a$, $x = b$, (Ox) , (C_f) dans un repère orthonormé. On l'obtient comme limite d'intégrales de fonctions en escalier.

Proposition 5 : (relation de Chasles)

Soit f une fonction continue par morceaux sur la réunion des intervalles $[a, b]$ et

$[b, c]$, alors : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Proposition 6 : (linéarité)

Soient f et g 2 fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Proposition 7 : (positivité)

Soit f une fonction continue par morceaux $[a, b]$ ($a \leq b$).

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

Proposition 8 : (positivité stricte)

Soit f une fonction continue par morceaux $[a, b]$ ($a < b$) vérifiant :

- i) $f \geq 0$ sur $[a, b]$,
- ii) $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$
- iii) f continue en x_0 .

$$\text{Alors : } \int_a^b f > 0$$

Corollaire : Si f est CONTINUE sur $[a, b]$ et $\int_a^b |f| = 0$ alors $f = 0$.

Proposition 9 : (comparaison) Soient f et g 2 fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ ($a \leq b$) telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Corollaire : Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ ($a \leq b$),

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x). \quad \text{Alors :} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Définition : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ ($a < b$). Le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ est appelé } \mathbf{valeur moyenne} \text{ de } f \text{ sur } [a, b].$$

Proposition 10 : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ ($a \leq b$). Alors :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Proposition 11 : (inégalité de la moyenne)

Soient f et g 2 fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ ($a \leq b$).

$$\text{Alors :} \quad \left| \int_a^b f g \right| \leq \sup_{[a, b]} |f| \int_a^b |g|.$$

Remarque : en particulier $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$

Théorème 3 : (inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales)

Soient f et g 2 fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ ($a \leq b$) : $\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)$

2.3 Application au calcul d'aire

Proposition 12 : Soient f et g 2 fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$ ($a \leq b$) et D le domaine délimité par C_f , C_g et les droites d'équation $x = a$, $x = b$.

$$\text{Alors : } A(D) = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt \quad (\text{unités d'aires}).$$

Théorème 4 : Somme de Riemann

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ vers \mathbb{R} .

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t).dt.$$

Remarque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t).dt$

3. PRIMITIVES et INTEGRALES d'une fonction continue**3.1 Primitive**

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I avec $F' = f$.

Remarque : 2 primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Primitives usuelles :

$f(x)$	$F(x)$	remarques
x^α	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$1/x$	$\ln x $	sur un intervalle I tel que $0 \notin I$
$u'(x)/u(x)$	$\ln u(x) $	sur un intervalle I où $u(x) \neq 0$
$1/(1+x^2)$	$\text{Arctan } x$	
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\text{Arcsin } x$	$x \in]-1, 1[$
$1/\sqrt{1+x^2}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	
$1/\sqrt{x^2-1}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} $	$x \in]-\infty, -1[$ ou $x \in]1, +\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	sur un intervalle I tel que $1 \notin I$ et $-1 \notin I$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$x \in]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$x > 0$

3.2 Primitive et intégrale

Théorème 5 : Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

i) La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

ii) Pour toute primitive h de f sur I , $\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a)$.

Application : si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b f = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Corollaire 1 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Corollaire 2 : Soit f une fonction de classe C^1 sur I . Alors : $\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

3.3 Intégration par parties

Théorème 6 : Soient u et v 2 fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$.

Alors :
$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

3.4 Changement de variable

Théorème 7 : Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ et f une fonction continue sur un segment contenant $\varphi([\alpha, \beta])$.

Alors :
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du$$

3.5 Applications

Théorème 8 :

i) Soit f une fonction continue sur I contenant a et $-a$.

Si f est paire sur I alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Si f est impaire sur I alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

ii) Soit f une fonction continue de T -périodique sur \mathbb{R} .

Alors : $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

4. CALCULS de PRIMITIVES

à une constante près :

$a \neq 0 : \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{Arc tan } \frac{x}{a}$

$a > 0 : \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Arc sin } \frac{x}{a}$

$a \neq 0 : \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$

$|x| < a : \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \text{Argth } \frac{x}{a}$

$a > 0 : \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \text{Argsh } \frac{x}{a}$

$a > 0$ et $|x| > a : \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \text{Argch } \frac{x}{a} & \text{pour } x > a \\ -\text{Argch} \left(-\frac{x}{a} \right) & \text{pour } x < -a \end{cases}$

$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right|$

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$

$\int thx dx = \ln(chx)$

$$\int \frac{dx}{shx} = \ln \left| th \left(\frac{x}{2} \right) \right|$$

$$\int \frac{dx}{chx} = 2 \operatorname{Arc} \tan(e^x)$$

Fonctions polynomiales en sinus et cosinus Calcul de $\int \cos^n x \sin^m x dx$

- Si m est impair (resp. n est impair), on pose : $\cos x = t$ (resp. $\sin x = t$).
- Si m et n sont pairs alors il faut linéariser.

Fonctions rationnelles en sinus et cosinus

$$\int R(\sin x, \cos x).dx = \int f(x)dx \quad \text{où } R \in \mathbb{R}(X). \quad \text{Posons } w(x) = f(x) dx.$$

En l'absence d'idée particulière, on peut utiliser les tests de Bioche :

- Si $w(-x) = w(x)$ on peut poser $\cos x = t$
- Si $w(\pi-x) = w(x)$ on peut poser $\sin x = t$
- Si $w(\pi+x) = w(x)$ on peut poser $\tan x = t$
- Sinon, on peut poser $\tan \frac{x}{2} = t$

Calcul de $\int e^{\alpha x} P(x) dx$ où P est un polynôme

- On peut procéder à des intégrations par parties successives.
- On peut aussi remarquer que $\int e^{\alpha x} P(x) dx = e^{\alpha x} Q(x) + C$ (C réel) où Q est un polynôme de même degré que P et procéder par identification car $Q' + \alpha Q = P$.

Calcul de $\int e^{\alpha x} \cos ax dx$ et $\int e^{\alpha x} \sin ax dx$

- On peut effectuer 2 intégrations par parties.
- On peut remarquer que ces fonctions ont pour primitives des fonctions de la forme $F(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos ax + \mu \sin ax) + C$ (C réel) et procéder par identification.
- On peut aussi passer par les complexes.

Intégrales abéliennes

a) Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$: on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

b) Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$: On peut mettre le trinôme sous forme canonique et se ramener à des primitives de fonctions rationnelles de fonctions circulaires ou hyperboliques.

5. FORMULE DE TAYLOR avec reste INTEGRAL

Théorème 9 : Soit f de classe C^{p+1} sur un intervalle I . Alors, $\forall (a, b) \in I$:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Rq : si $a=0$ et $b=x$ on obtient : $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$