

**AN. 9**  
**Comparaison locale des fonctions**  
**Développement limité**

- Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques définies sur  $D \subset \mathbb{R}$  et au voisinage de  $a$  (éventuellement privé de  $a$ ).
- Les définitions et propositions s'étendent facilement aux suites réelles (uniquement au voisinage de  $a = +\infty$ ).

**Remarques :** Soit  $f$  définie sur  $D$ ,  $f$  est définie au voisinage de  $a$  signifie que :

- Pour  $a$  réel, il existe un intervalle ouvert de centre  $a$  ( $]a-h, a+h[$ ) contenu dans  $D$ .
- Pour  $a = +\infty$ , il existe un intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  contenu dans  $D$  (de même pour  $a = -\infty$ ).

## I. Prépondérance – Domination – Equivalence

### 1.1. Définitions

**Définition :** Soient  $f$  et  $g$  telles qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une fonction  $h$  définie sur  $V$  vérifiant :  $\forall x \in V \cap D \quad f(x) = h(x) g(x)$ .

Si  $\lim_a h = 0$  on dit que  $f$  est **négligeable devant**  $g$  au voisinage de  $a$  et on note  $f = o_a(g)$ .

Si  $\lim_a h = 1$  on dit que  $f$  est **équivalente à**  $g$  au voisinage de  $a$  et on note  $f \sim_a g$ .

Si  $h$  est bornée sur  $V$  on dit que  $f$  est **de l'ordre de**  $g$  au voisinage de  $a$  et on note  $f = O_a(g)$ .

**Exemples :** au voisinage de  $\infty$  : si  $n > p$  alors  $x^p = o(x^n)$   
 au voisinage de  $0$  : si  $n > p$  alors  $x^n = o(x^p)$   
 $\sin x \underset{0}{\sim} x$

$$\sin x = O_0(1) \quad \text{et} \quad \frac{\cos x}{x} = O_\infty\left(\frac{1}{x}\right)$$

### Proposition :

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , sauf peut-être en  $a$ , alors :

$$f = o_a(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ \text{et } f(a) = 0 \end{cases} \quad \text{si } f \text{ et } g \text{ sont définies en } a$$

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ \text{et } f(a) = g(a) \end{cases} \quad \text{si } f \text{ et } g \text{ sont définies en } a$$

**Exemples usuels** (à connaître)

Au voisinage de  $0$  :  $\sin x \sim x$        $\tan x \sim x$        $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$   
 $\ln(1+x) \sim x$        $e^x - 1 \sim x$        $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )  
 $\text{Arctan} x \sim x$        $\text{Arcsin} x \sim x$        $\text{sh} x \sim x$        $\text{th} x \sim x$

$$\ln x \underset{1}{\sim} x-1$$

Si  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_m x^m$  avec  $n \geq m$ ,  $a_n \neq 0$  et  $a_m \neq 0$ ,  
alors :  $P(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$  et  $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$ .

### Croissances comparées :

- Au voisinage de  $+\infty$  :  
 $\ln x = o(x)$                        $\forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R} (\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$   
 $\forall n \in \mathbb{Z}, x^n = o(e^x)$                $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a > 1, x^\alpha = o(a^x)$
- Au voisinage de 0 :  $\forall \alpha > 0, \ln x = o(1/x^\alpha)$

## 1.2. Propriétés des équivalents

**Propriété 1 :** la relation ' $\underset{a}{\sim}$ ' est une relation d'équivalence entre les fonctions définies au voisinage de  $a$ .

**Propriété 2 :**  $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = o_a(g)$

**Propriété 3 :** Si  $\ell \in \mathbb{R}^*$  :  $f \underset{a}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim_a f = \ell$   
 Si  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  :  $(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \lim_a g = \ell) \Rightarrow \lim_a f = \ell$

**Propriété 4 :** Si  $f \underset{a}{\sim} g$ , alors il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que :  $\forall x \in V \cap D$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont de même signe.

**Propriété 5 :** La relation ' $\underset{a}{\sim}$ ' est compatible avec le produit et l'inverse :

si  $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$  et  $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$  alors  $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$   
 et  $\frac{1}{f_1} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g_1}$  (lorsque  $f_1$  et  $g_1$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ ).

**Propriété 6 : Composition à droite**

si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $\lim_b h = a$  alors  $foh \underset{b}{\sim} goh$

**Composition à gauche :**

**Propriété 7 :** si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $|f| \underset{a}{\sim} |g|$   
 si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $g > 0$  (au voisinage de  $a$ ) alors  $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$  ( $\alpha$  réel)

**Propriété 8 : Composition par le logarithme**

Si  $g > 0$  et  $f \underset{a}{\sim} g$  avec  $\lim_a g = b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  alors  $\ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ g$

**Remarque :** attention car  $1+x \underset{0}{\sim} 1+x^2$  mais  $\ln(1+x) \not\underset{0}{\sim} \ln(1+x^2)$  car  $x \not\underset{0}{\sim} x^2$ .

**Propriété 9 :** Composition par l'exponentielle

$$e^f \sim e^g \Leftrightarrow \lim_a (f - g) = 0$$

**Remarques :**

- Au voisinage de  $+\infty$ ,  $x+1 \sim x$  mais  $e^{x+1} \not\sim e^x$ .
- ' $\sim$ ' n'est pas compatible avec l'addition.

## II. Développement limité

### 2.1. Définitions et propriétés

**Définition :** (DL au voisinage de  $a$  à l'ordre  $n$ )

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $a \in \overset{\circ}{I}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$ . On dit que  $f$  admet un **développement limité au voisinage de  $a$  à l'ordre  $n$** , que l'on le note  $DL_n(a)$ , si :

Pour tout  $x$  voisin de  $a$ ,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \text{ avec } (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

L'expression :  $\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n$  s'appelle partie régulière du  $DL_n(a)$  de  $f$ .

**Proposition 1 :** (Unicité de la partie régulière)

Si  $f$  admet un  $DL_n(a)$  alors sa partie régulière est unique.

**Proposition 2 :** (Troncature d'un  $DL_n(a)$ )

Si  $f$  admet un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $P$ , alors  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $f$  admet un  $DL_k(a)$  de partie régulière  $P_k$  obtenu par troncature de  $P$  au degré  $k$ .

### 2.2. Formule fondamentale

**Théorème de Taylor-Young :** Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $a \in \overset{\circ}{I}$  et  $f \in \mathbb{R}^I / f \in C^n(I)$ . Alors  $f$  admet un  $DL_n(a)$  :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o((x-a)^n).$$

**Remarque :** si  $f \in C^\infty(I)$ , alors  $f$  admet un DL au voisinage de  $a$  à tout ordre.

**Application :**  $DL_n(0)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

En particulier, on a :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

### 2.3. Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$

**Proposition 1 :** Soient  $f$  et  $g$  admettant un  $DL_n(0)$  de parties régulières respectives  $P$  et  $Q$ .

- a) pour  $k \in \mathbb{R}$ ,  $kf + g$  admet un  $DL_n(0)$  de parties régulières respectives  $kP + Q$  ;
- b)  $fg$  admet un  $DL_n(0)$  dont la partie régulière est obtenue en tronquant  $PQ$  au degré  $n$ .

### Proposition 2 : Composition

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $0 \in \overset{\circ}{I}$ ,  $f \in \mathbb{R}^I$  et  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $0 \in \overset{\circ}{J}$ ,  $g \in \mathbb{R}^J$ . Si  $f$  et  $g$  admettent un  $DL_n(0)$  de parties régulières respectives  $P$  et  $Q$  et  $f(0) = 0$  alors :

$g \circ f$  admet un  $DL_n(0)$  dont la partie régulière est obtenue en tronquant  $Q(P)$  au degré  $n$ .

### 2.4. Dérivation et primitivation d'un $DL_n(0)$

#### Proposition : Primitivation

Soient  $f$  admettant un  $DL_n(0)$  de partie régulière  $P$ ,  $F$  une primitive de  $f$  et  $Q$  la primitive de  $P$  telle que  $Q(0) = F(0)$ . Alors :

$F$  admet un  $DL_{n+1}(0)$  de partie régulière  $Q$ .

**Application :**  $DL_n(0)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\text{Arctan}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{Arcsin}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n) \times (2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

### Corollaire : Dérivation

Soit  $f$  une fonction admettant un  $DL_n(0)$  de partie régulière  $P$  telle que  $f'$  admet un  $DL_{n-1}(0)$ . Alors la partie régulière du  $DL_{n-1}(0)$  de  $f'$  est  $P'$ .

### 2.5. Exemples d'application des DL

a) Calcul de limites

**Proposition :** Si  $f$  admet un  $DL_0(a) : f(x) = \alpha_0 + o(1)$  alors  $f$  admet  $\alpha_0$  pour limite en  $a$ .

b) Prolongement en un point**Proposition 1 :**

Si  $f$  admet un  $DL_1(a) : f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - a) + o(x - a)$  alors  $f$  se prolonge par continuité en  $a$  en une fonction  $g$  tel que  $g(a) = \alpha_0$ , la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  ayant pour équation :  $y = \alpha_0 + \alpha_1 (x - a)$ .

**Proposition 2 :**

Si  $f$  admet un  $DL_n(a) : f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - a) + \dots + \alpha_n (x - a)^n + o((x - a)^n)$  et  $p$  le plus petit entier tel que  $p > 1$  et  $\alpha_p \neq 0$  alors la position de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  par rapport à celle ci est déterminée par le signe de  $\alpha_p (x - a)^p$ .

c) Recherche d'asymptotes Soit  $f$  définie au voisinage de  $+\infty$  ou  $-\infty$ .**Proposition :**

Si  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{\alpha_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_p \neq 0$  alors  $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$  est

l'équation de l'asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de l'infini ; la position de cette

asymptote par rapport à la courbe est déterminée par le signe de  $\frac{\alpha_p}{x^p}$ .