An.8 DERIVATION

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 points et f une application de I vers $\mathbb{R}$.

I. DEFINITIONS (rappels)

Définitions 1 : Soit $a \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie; cette limite est alors notée f '(a) et appelée nombre dérivé de f en a.
- On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{h \xrightarrow[>]{} 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie; cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et appelée nombre dérivé à droite en a.
- On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{h \xrightarrow[<]{} 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie; cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et appelée nombre dérivé à gauche en a.

Remarques :

- f est dérivable en a si et seulement si $f'_d(a) = f'_g(a)$
- On a aussi f dérivable en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

Définition 2 : Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I on dit que f est dérivable sur I et la fonction : $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$ est appelée fonction dérivée de f (notée f ' ou Df ou $\dfrac{df}{dx}$).

II. PROPRIETES

Proposition 1 : Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarque : La réciproque est fausse.

Proposition 2 : Si f est dérivable en a, alors (C_f) admet au point d'abscisse a une tangente d'équation : y - f(a) = f '(a)(x - a).

Remarques :

- Un vecteur directeur de la tangente est $\vec{v}(1\ ,\ f'(a))$.
- Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a , (C_f) admet une demi-tangente à droite (resp. à gauche) au point d'abscisse a.
- Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand h tend vers 0 (ou 0^+, ou 0^-) on admet que (C_f) a une tangente (ou une demi tangente) verticale en le point (a, f(a)).

Proposition 3 : Soient f et g 2 fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :

(1) f + g est dérivable sur I et (f + g)' = f ' + g'

(2) af ($a\in\mathbb{R}$) est dérivable sur I et (af)' = af '

(3) f g est dérivable sur **I** et (f g)' = f 'g + f g'

(4) si f ne s'annule pas sur I , 1/f est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$

(5) si g ne s'annule pas sur I , f/g est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Remarque : Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions dérivables sur I ($n \geq 2$). Alors $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ est dérivable sur I et $(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)' = \sum_{i=1}^{n} (f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_i' \times \cdots \times f_n)$.

Proposition 4 : Composition de fonctions dérivables.

Soient f dérivable sur I et g dérivable sur J avec $f(I) \subset J$. Alors :

gof est dérivable sur I et **(gof)' = (g'of) f '.**

Applications :

1. Si u dérivable sur I et $n\in\mathbb{N}^*$ alors : u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

2. Soit *u dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I* . Alors f = ln|u| est dérivable sur I

et $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

Proposition 5 : Fonctions réciproques.

Soient f une fonction continue strictement monotone de I sur J=f(I) et $a\in I$ tel que f dérivable en a avec **f '(a) ≠ 0.**

Alors f^{-1} est dérivable en b = f(a) et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

III. DERIVEES SUCCESSIVES

3.1 Définitions

- Si f est dérivable sur I et f ' est dérivable sur I on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note f '' la dérivée de f '.
- Par récurrence on peut ainsi définir la dérivée $n^{ième}$ comme la dérivée de la dérivée $(n-1)^{ième}$ et on dit que f est n fois dérivable sur I : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ en posant $f^{(0)} = f$

  On peut noter $f^{(n)}$ ou $D^n f$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$
- L'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I est noté $D_n(I, \mathbb{R})$.
- On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout n de $\mathbb{N}$.

3.2 Exemples : $\forall\, p\in\mathbb{N}$,

- $\forall\, x\in\mathbb{R}$: $(e^x)^{(p)}=e^x$, $(\sin)^{(p)}(x)=\sin(x+p\frac{\pi}{2})$ *et* $(\cos)^{(p)}(x)=\cos(x+p\frac{\pi}{2})$
- $\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $(x^\alpha)^{(p)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)x^{\alpha-p}$.
- $\forall n\in\mathbb{N}$: $\left|\begin{array}{ll} si\quad 0\le p\le n & (x^n)^{(p)}=\dfrac{n!}{(n-p)!}x^{n-p} \\ si\quad p>n & (x^n)^{(p)}=0\end{array}\right.$.

3.3 Formule de Leibniz

Théorème 1 **:** Soient f et g 2 fonctions n fois dérivables sur I ($n\in\mathbb{N}$). Alors f g est dérivable n fois sur I et $(f\,g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$, où $C_n^k=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3.4 Classe d'une fonction

Définitions :

- Soit $n\in\mathbb{N}$. On dit que f est **de classe C^n sur I** si :
  i) f est n fois dérivable sur I.
  ii) $f^{(n)}$ est continue sur I.
- On dit que f est de **classe C^∞ sur I** si f est indéfiniment dérivable sur I.

Remarques :

- Pour $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, on note $C^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^n de I dans $\mathbb{R}$.
- Une fonction de classe C^0 sur I est une fonction continue sur I.
- Une fonction peut être n fois dérivable sur I sans être de classe C^n .

Proposition 1 : la somme, le produit, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^n sur I est de classe C^n sur I ($n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$)

Remarque : Les fonctions polynômes, sinus, cosinus, exp,..., sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2 : Si $f\in C^n(I,\mathbb{R})$ et $g\in C^n(f(I),\mathbb{R})$ alors $g\circ f\in C^n(I,\mathbb{R})$ où $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$

IV. THEOREMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

4.1 Extremum local

Définition : Soient f définie sur un intervalle I et $a\in I$.
f admet un **maximum** (resp. un **minimum**) **local** en a s'il existe un intervalle ouvert J de centre a tel que : $\forall x\in I\cap J\quad f(x)\le f(a)$ (resp. $f(x)\ge f(a)$)

Théorème 1 : Soit f définie sur un intervalle ouvert I, dérivable en $a\in I$.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a)=0$.

4.2 Théorème de Rolle

Théorème 2 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(b \neq a)$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Application : Si de plus $f(a) = f(b) = 0$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Donc entre 2 zéros de f, il existe au moins un zéro de f '.

4.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 3 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(b \neq a)$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

Corollaire : **Inégalité des accroissements finis.**
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(b \neq a)$, dérivable sur $]a, b[$.
S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$.
Alors $\forall (x_1, x_2) \in ([a,b])^2$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$

4.4 Applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités éventuelles.

Théorème 4 : Dérivée et sens de variation.

Soit f continue sur I dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

(1) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
(2) f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$.
(3) f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$ et ne s'annule qu'en des points isolés.

Théorème 5 : Prolongement de la dérivée.
Soit f *continue sur [a , b] et dérivable sur] a , b [* (b>a).

- Si f ' admet une limite finie à droite en a alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$
- Si $\lim_{x \to a^+} f'(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$)

Remarque : Si f est continue sur [a,b], de classe C^1 sur]a,b[et telle que $\lim_{a^+} f' = \ell \in \mathbb{R}$,
alors f est de classe C^1 sur [a,b[.

Théorème 6 : Extension du théorème de Rolle.
Soit f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim_{+\infty} f = f(a)$.
Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

V. FONCTIONS CONVEXES

5.1 Définitions

Définition :

- Un ensemble E est dit **convexe** si : $\forall(A, B)\in(E)^2$ le segment [AB] est inclus dans E.
- Une application f définie sur un intervalle I est dite **convexe** si :
  $\forall(a, b) \in I^2,\ \forall\lambda \in [0,1],\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.
- f est dite concave si (–f) est convexe.

Remarques :

- Cette définition est équivalente à : $\forall(x, y)\in I^2$, $\forall(\lambda_1,\lambda_2) \in ([0,1])^2$ tels que $\lambda_1+\lambda_2=1$
  $f(\lambda_1 x+\lambda_2 y)\leq \lambda_1 f(x)+\lambda_2 f(y)$.
- Une fonction f est convexe si sa courbe représentative est au dessous de ses cordes.
- f est concave si sa courbe représentative est au dessus de ses cordes.

5.2 Propriétés

Proposition 10 : Soit f définie sur un intervalle I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) f est convexe sur I.
(2) La partie *Epi f* du plan située au dessus de C_f (**épigraphe** de f) est convexe.
(3) Tout arc de C_f est sous sa corde.

Proposition 11 : f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a\in I$, la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ est croissante sur } I\backslash\{a\}.$$

Proposition 12 : Soit f dérivable sur un intervalle I.
i) f est convexe sur I si et seulement si f ' est croissante sur I.
ii) f est convexe sur I si et seulement si C_f est au dessus de chaque tangente.

Proposition 13 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.

Proposition 14 : Inégalité de convexité.
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.
Pour $(x_i)_i \in I^n, (\lambda_i)_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ on a $f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

5.3 Point d'inflexion

Définition : Lorsque C_f traverse sa tangente en un point $M_0(x_0,f(x_0))$, le point M_0 est appelé **point d'inflexion** de C_f.

Proposition 15 : Si la fonction f est deux fois dérivable sur I et si f '' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in I$, alors $M_0(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de C_f.