

AN. 7 : Limites

Dans ce chapitre on considère des fonctions de \mathbb{R} vers K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) définies sur une partie D qui est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points ou une réunion de tels intervalles.

I. Notions de limite

Définition 1 : (Limite finie) Soient $f \in K^D$ et $\ell \in K$.

- Soit $a \in \overline{D}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

On note $\lim_a f = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

- Soit f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que $\lim_{+\infty} f = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, (x \geq B \text{ (resp. } x \leq B) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Proposition 1 : si $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a f = \ell'$ alors $\ell = \ell'$

Proposition 2 : si $a \in D$ et $\lim_a f = \ell$ alors $f(a) = \ell$

Définition 2 :

On dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a si $f|_{]a, +\infty[\cap D}$ a pour limite ℓ en a .

On dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a si $f|_{]-\infty, a[\cap D}$ a pour limite ℓ en a .

On note $\lim_{x \rightarrow a}^> f(x) = \lim_{a^+} f$ la limite à droite en a et $\lim_{x \rightarrow a}^< f(x) = \lim_{a^-} f$ la limite à gauche.

Proposition 3 :

$$\begin{aligned} \text{Si } a \in D & \quad \text{alors} \quad \lim_a f = \ell \Leftrightarrow \lim_a f = \lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = f(a) = \ell \\ \text{Si } a \notin D & \quad \text{alors} \quad \lim_a f = \ell \Leftrightarrow \lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = \ell \end{aligned}$$

Définition 3 : Limite infinie en l'infini

Soit f définie au voisinage de $+\infty$

On dit que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$.

De même en $-\infty$ ou pour $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

Définition 4 : Limite infinie en une valeur finie

Soient f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et $a \notin D$ tel que a soit une extrémité d'un intervalle de D . On dit que :

$$\lim_a f = +\infty \text{ si : } \forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A.$$

De même à gauche et à droite en a ou pour $\lim_a f = -\infty$

2. OPERATIONS sur les LIMITES Quand x tend vers a (fini ou non)

Somme :

si f a pour limite :	et si g a pour limite :	alors $f + g$ a pour limite :
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	<i>on ne peut conclure</i>

Produit :

si $ f $ a pour limite :	et si $ g $ a pour limite :	alors $ fg $ a pour limite :
l	l'	ll'
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	<i>on ne peut conclure</i>

Quotient : (g ne s'annulant pas au voisinage de a)

si $ f $ a pour limite :	et si $ g $ a pour limite :	alors $ f/g $ a pour limite :
l	$l' \neq 0$	l/l'
$l \neq 0$	0	$+\infty$
0	0	<i>on ne peut conclure</i>
l	$+\infty$	0
$+\infty$	l'	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	<i>on ne peut conclure</i>

Théorème 1 : Soient $(a, b, c) \in (\overline{\mathbb{R}})^3$, f et g deux fonctions numériques telles que $g \circ f$ soit définie au voisinage de a (sauf peut-être en a).

$$\text{Si } \lim_a f = b \text{ et } \lim_b g = c \text{ alors } \lim_a g \circ f = c$$

3. INEGALITES- MONOTONIE

Théorème 2 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g telles que $f \leq g$ au voisinage de a .

$$\text{Si } \lim_a f = l \text{ et } \lim_a g = l' \text{ alors } l \leq l' \quad (l, l' \text{ réels})$$

$$\text{Si } \lim_a f = +\infty \text{ alors } \lim_a g = +\infty$$

Remarques :

- si $f < g$ au voisinage de a et $(\lim_a f = l \text{ et } \lim_a g = l')$ alors on a encore $l < l'$.
- $f < g \not\Rightarrow l < l'$.

Théorème 3 : "Thm des gendarmes"

Soient f, g et h 3 fonctions telles que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).
 Si $\lim_a f = \lim_a h = \ell$ alors **g admet une limite en a** et $\lim_a g = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$).

Proposition 4 : Soient ℓ, m, M réels et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim_a f = \ell$ avec $m < \ell < M$, alors au voisinage de a on a :

$$m < f < M$$

Proposition 5 :

si $\lim_a f = 0$ et g bornée au voisinage de a alors $\lim_a fg = 0$

Théorème 4 : Soit f une fonction définie et croissante sur $]a, b[$, alors :

(i) f admet une limite à gauche en b et :

si f est majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{b^-} f = \sup_{]a, b[} f$

si f n'est pas majorée alors $\lim_{b^-} f = +\infty$

(ii) si $c \in]a, b[$, alors f admet une limite à droite et à gauche en c et

$$\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$$

Remarque : de même à droite en a lorsque f est décroissante sur $]a, b[$.

4. QUELQUES LIMITES CLASSIQUES

a) Avec les fonctions **sin** et **tan** :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

b) Avec les fonctions **ln** et **exp** :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

5. BRANCHES INFINIES

5.1 Asymptotes, branches paraboliques : définitions

Asymptotes :

- Si $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f
- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$
On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à C_f
- Si $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0$) alors on dit que C_f et C_g sont 2 courbes asymptotes au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)

Branches paraboliques :

- Si $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on dit que C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).
- Si $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ on dit que C_f admet une branche parabolique de coefficient directeur a .

5.2 Méthode de recherche

