AN. 6 : Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans K

K désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers K

Définition 1 : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 éléments, on note K^X l'ensemble des applications de X vers K.

Cet ensemble est muni de 2 lois internes, notées + et $\times$ et d'une loi externe notée **.** :

- $\forall (f, g) \in (K^X)^2, \forall x \in X$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f \times g)(x) = f(x)g(x)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in K^X, \forall x \in X$, $(\lambda . f)(x) = \lambda f(x)$

Remarques 1 :

- $f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) = 0$
- f s'annule sur X $\Leftrightarrow \exists x \in X, f(x) = 0$
- Il existe des diviseurs de zéro : $\exists (f, g) \in \left(K^X\right)^2 / (f \neq 0 , g \neq 0$ et $fg = 0)$

Définition 2 : Soit $g \in K^X$. Si : $\forall x \in X, g(x) \neq 0$, alors on définit l'application $\frac{1}{g} : X \to K$ par :

$$\forall x \in X, \ \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

Définition 3 : Soit $f \in K^X$.
On définit l'application $| f | : X \to K$ par : $\forall x \in X, | f |(x) = | f(x) |$.

Remarque 2 : En général, $| f | \neq f$ et $| f | \neq -f$.

Définition 4 : Soit $f \in \mathbb{C}^X$. On définit les applications $\bar{f}$, Re(f) et Im(f) de X dans $\mathbb{C}$ par :
$\forall x \in X, \ \bar{f}(x) = \overline{f(x)}$, $\mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$.

II. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}^X$

Définition 1 : Soit $(f, g) \in (\mathbb{R}^X)^2$. On dit que $f \leq g$ si : $\forall x \in X \quad f(x) \leq g(x)$.

Proposition : Dans $\mathbb{R}^X$, la relation ' $\leq$ ' est une relation d'ordre compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Remarque : L'ordre n'est pas total.

Définition 2 : Soit $(f, g) \in (\mathbb{R}^X)^2$. On définit 2 nouvelles applications :

- $\sup(f, g) : X \to \mathbb{R}$, $\sup(f, g) : x \to \sup(f(x), g(x))$
- $\inf(f, g) : X \to \mathbb{R}$, $\inf(f, g) : x \to \inf(f(x),g(x))$.

Remarques :

- $\sup(f, g) = (1/2)(f + g + |f - g|)$.
- $\inf(f, g) = (1/2)(f + g - |f - g|)$.
- En particulier, $|f| = \sup(f, -f)$

III. Parité, éléments de symétrie

a) Parité : Soit X est une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

Définition : Soit $f \in \mathbb{R}^X$.

On dit que f est ***paire*** (resp ***impaire***) si : $\forall x \in X$, $f(-x) = f(x)$ (resp $f(-x) = -f(x)$)

Remarques :

- Si f est paire, alors $(O, \vec{j})$ est axe de symétrie de la courbe C_f avec $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan
- Si f est impaire, O est centre de symétrie de la courbe C_f avec $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan.
- Toute application constante est paire.
- Si f est impaire et $0 \in X$ alors $f(0) = 0$.

b) Axe de symétrie : La droite D : $x = a$ est axe de symétrie de C_f si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $(a + x) \in D_f$, on a : $(a - x) \in D_f$ et $f(a - x) = f(a + x)$.

Remarques :

- Cette condition est équivalente à : $\forall x \in D_f$, $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$
- Lorsque D : $x = a$ est axe de symétrie de C_f, il suffit d'étudier f sur $[a, +\infty[\cap D_f$

c) Centre de symétrie : Le point $\omega(a,b)$ est centre de symétrie de C_f si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $(a + x) \in D_f$, on a : $(a - x) \in D_f$ et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

Remarques :

- Cette condition est équivalente à : $\forall x \in D_f$, $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- Si $\omega(a,b)$ est centre de symétrie de C_f, il suffit d'étudier f sur $[a, +\infty[\cap D_f$

IV. Périodicité

Définition : Soit $f : X \to \mathbb{R}$, on dit que f est périodique si :

$\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{Z}, (x + nT) \in X$ et $f(x + T) = f(x)$.

On dit que T est une période de f.

Remarque : Lorsque f est périodique de période T , il suffit d'étudier la fonction f sur un intervalle d'amplitude T. Le reste de la courbe se déduit à l'aide des translations de vecteurs $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

V. <u>Monotonie</u>

On désigne par I un intervalle contenant au moins 2 points.

Définitions : Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

- On dit que f est ***croissante*** (resp ***décroissante***) sur I si :
$$\forall (a, b) \in I^2,\ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \text{ (resp : } f(a) \geq f(b) \text{)}$$
- On dit que f est ***strictement croissante*** (resp ***strictement décroissante***) sur I si :
$$\forall (a, b) \in I^2,\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \text{(resp : } f(a) > f(b)\text{)}$$
- On dit que f est ***constante*** sur I si : $\forall (a, b) \in I^2,\ f(a) = f(b)$
- On dit que f est ***monotone*** sur I si f est croissante ou décroissante sur I

Remarque : f strictement monotone sur I $\Rightarrow$ f injective (la réciproque est fausse).

Proposition : Soient f et g : $I \to \mathbb{R}$
1) f et g sont croissantes $\Rightarrow$ $f + g$ est croissante.
2) f croissante $\Rightarrow$ $(-f)$ décroissante
3) f et g sont croissantes et positives $\Rightarrow$ fg croissante.
4) $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ monotones telles que $f(I) \subset J$, alors :
   i) f et g croissantes (resp : décroissantes) $\Rightarrow$ gof est croissante
   ii) f est croissante et g est décroissante $\Rightarrow$ gof est décroissante

VI. <u>Applications majorées, minorées, bornées</u>

Définition : soit $f : X \to \mathbb{R}$, on dit que :

- f est ***majorée*** (resp ***minorée***) si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \leq M$ (resp $M \leq f(x)$)
- f est bornée si f est majorée et minorée.

Remarque : f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Proposition - Définition 1 : Si $f : X \to \mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée), alors f(X) admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$, appelée borne supérieure (resp. inférieure) de f et notée $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x \in X} f(x)$) ou $\sup\limits_X f$ (resp. $\inf\limits_X f$)

Proposition 2 :

1) Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont majorées , alors $f + g$ est majorée et
$$\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g.$$
2) Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont majorées et positives alors fg est majorée et
$$\sup_X (fg) \leq (\sup_X f)(\sup_X g).$$

VII. <u>Continuité locale</u>

1. <u>Définitions</u>

<u>Définitions 1</u> : f définie sur un intervalle I est continue en $a \in I$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Remarques :

- f est continue en $a \in I$ si f admet f(a) pour limite en a.
- On dit que f est continue à droite en a si $a \in I$ et $\lim_{a^+} f = f(a)$.
- On dit que f est continue à gauche en a si $a \in I$ et $\lim_{a^-} f = f(a)$.

Définitions 2 :

i) On dit que f admet une discontinuité de 1er espèce en $a \in I$ si :

f est non continue en a et $(\lim_{a^-} f, \lim_{a^+} f) \in \mathbb{R}^2$.

ii) On dit que f admet une discontinuité de 2nde espèce en $a \in I$ si f n'est pas continue et n'admet pas une discontinuité de 1er espèce en $a \in I$.

Proposition : si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a

2. Opérations sur les fonctions continues

Proposition 1 : Soient f et g continues en a alors :

i) $f + g$; fg ; λf ($\lambda \in \mathbf{K}$), $|f|$, sup(f, g), inf(f, g) sont continues en a,

ii) Si de plus $g(a) \neq 0$, $1/g$ et f / g sont continues en a.

iii) Si $K = \mathbb{C}$, Re(f), Im(f) et $\bar{f}$ sont continues en a.

Proposition 2 : Les fonctions polynômes, rationnelles, valeur absolue, sinus, cosinus, tangente, cotangente, exponentielles, logarithmes, puissances sont continues en tout point où elles sont définies.

Proposition 3 : **composition**

Si f est continue en a et g continue en f(a) alors gof est continue en a.

3. Prolongement par continuité

Définition : Soit f définie sur un intervalle I privé de a et admettant une limite en a.

La fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$ si $x \in I \setminus \{a\}$

$$g(a) = \lim_{a} f$$

est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

Remarque : Si $a \notin I$, f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a.

VIII. Continuité globale

Définition 1 : On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout point de I.

Remarque : On note C(I, **K**) ou C°(I, **K**) l'ensemble des fonctions continues de I vers **K.**

Définition 2 : Soient $f \in K^I$ et J un intervalle tel que $J \subset I$.

On dit que la fonction f est continue sur J si $f_{/J}$ est continue sur J.

Proposition : Les fonctions polynômes, rationnelles, valeur absolue, sinus, cosinus, tangente, cotangente, exponentielles, logarithmes, puissances sont continues sur les domaines où elles sont définies.

IX. Propriétés des fonctions continues à valeurs réelles

Théorème 1 : Si f est continue sur un intervalle I, alors f(I) est un intervalle.
i.e. : $\forall (a,b) \in I^2$, f prend toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b).

Remarque : On en déduit que (f continue sur [a,b] et $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists x \in]a,b[\ / \ f(x)=0$).

Théorème 2 : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
i.e. : Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

Remarque : soit f continue et strictement croissante sur I :

- si $I = [a,b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$
- si $I =]a,+\infty[$ alors $f(I) =]\lim\limits_{a^+} f , \lim\limits_{+\infty} f[$

Théorème 3 :
Si une fonction f est continue et strictement croissante sur un intervalle réel I, alors f établit une bijection de I vers f(I).