AN. 5 Suites Réelles

I. Définitions

Définition : On appelle **suite réelle** toute application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ **:**

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

On note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) la suite, u_n étant le terme général de la suite.

Remarque : on peut aussi définir des suites sur $\mathbb{N}^*$ ou bien sur $E = \{n \geq n_0 , n_0 \in \mathbb{N}\}$ mais comme il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$, l'étude des suites définies sur $\mathbb{N}$ suffit.

Définitions 1 :

On dit qu'une suite (u_n) est :

- ***Croissante (resp. décroissante)*** si $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$)
- ***strictement croissante (resp. strictement décroissante***) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (resp $u_{n+1} < u_n$)
- ***constante*** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$
- ***stationnaire*** si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ **/** $\forall n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$
- ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante
- ***majorée (resp. minorée)*** si $\exists\, M \in \mathbb{R}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ (resp. $M \leq u_n$)
- ***bornée*** si elle est majorée et minorée.

Définition 2 : soit (u_n) une suite réelle. On dit que (v_n) est **une suite extraite** de (u_n) , s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Définitions 3 :

On appelle :

- ***somme*** de (u_n) et (v_n) la suite de terme général $u_n + v_n$
- ***produit*** de (u_n) et (v_n) la suite de terme général $u_n\ v_n$
- ***produit*** de (u_n) par un réel λ la suite de terme général $\lambda\, u_n$

II. Convergence d'une suite

a) Définitions

Définition :

On dit qu'une suite réelle (u_n) est ***convergente*** vers le réel ℓ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |\, u_n - \ell\,| \leq \varepsilon$$

On note $\lim u_n = \ell$.

Toute suite non convergente est dite ***divergente.***

Proposition :

Si $\lim u_n = \ell$ alors $\lim |u_n| = |\,\ell\,|$.

Remarque : Attention ! la réciproque est fausse.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A.$$

Remarques :

- (u_n) a pour limite $-\infty$ si $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$.
- Si (u_n) a pour limite $+\infty$ (respectivement : $-\infty$) alors la suite (u_n) n'est pas majorée (respectivement : n'est pas minorée).
- Si (u_n) a pour limite $-\infty$ ou $+\infty$ alors $|u_n|$ a pour limite $+\infty$; attention ! la réciproque est fausse.

b) Propriétés des suites convergentes

Proposition 1 : Soit (u_n) une suite convergente alors sa limite est unique.

Proposition 2 : Toute suite convergente est bornée.

Proposition 3 : Toute suite convergente vers un réel strictement positif est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

Proposition 4 : Si (u_n) a pour limite ℓ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) alors toute suite extraite a pour limite ℓ.

Remarque : La contraposée de cette propriété sera parfois utilisée pour démontrer qu'une suite diverge : Il suffira, par exemple, de déterminer 2 suites extraites qui ont des limites différentes

III Opérations sur les limites

$$(l, l') \in \mathbb{R}^2$$

a) Somme :

si u_n a pour limite :	et si v_n a pour limite :	alors $u_n + v_n$ a pour limite :
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	***on ne peut conclure***

b) Produit :

si $\lvert u_n \rvert$ a pour limite:	et si $\lvert v_n \rvert$ a pour limite :	alors $\lvert u_n v_n \rvert$ a pour limite :
ℓ	ℓ'	$\ell \ell'$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{+\infty}$	***on ne peut conclure***

c) **Quotient :** (v_n ne s'annulant pas à partir d'un certain rang)

si $\lvert u_n \rvert$ a pour limite :	et si $\lvert v_n \rvert$ a pour limite :	alors $\lvert u_n/v_n \rvert$ a pour limite :
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell \neq 0$	0	$+\infty$
0	**0**	***on ne peut conclure***
ℓ	$+\infty$	0
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	***on ne peut conclure***

IV. Limites et relation d'ordre

a) Passage à la limite dans une égalité

Proposition 1 : Soient (u_n) et (v_n) 2 suites convergentes respectivement vers $\boldsymbol{l}$ et $\boldsymbol{l'}$

- S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq 0$, alors $\boldsymbol{l} \geq 0$.
- S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$, alors $\boldsymbol{l} \geq \boldsymbol{l'}$.

Attention : On ne peut pas améliorer le résultat précédent en utilisant une inégalité stricte (le passage à la limite élargit l'inégalité).

Proposition 2 :

Soient (u_n) , (v_n) 2 suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$

- si $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.
- si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

b) Existence de limite par encadrement

Proposition 1 : (théorème des « gendarmes »)

Soients (u_n), (v_n) et (w_n) 3 suites réelles telles que :

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$
- (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ

Alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

V. Conséquences de la propriété de la borne supérieure

a) Suites monotones

Proposition : Soit (u_n) une suite croissante.

- Si elle est majorée, elle converge vers $\boldsymbol{l} = \sup \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$
- Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$

Corollaire :

Soit (u_n) une suite décroissante.

- Si elle est minorée, elle converge vers $\boldsymbol{l} = \inf \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$
- Si elle n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$.

b) Suites adjacentes

Définition : On dit que 2 suites (u_n) et (v_n) sont ***adjacentes*** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Proposition : Soient (u_n) et (v_n) 2 suites adjacentes , elles convergent vers le même réel ℓ (de plus $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$)

VI. Suites récurrentes

a) Suites récurrentes d'ordre 1

Définition :

Soient $f : A \to A$ où $A \subset \mathbb{R}$ et $u_0 \in A$. On appelle suite récurrente toute suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}= f(u_n)$.

Proposition : Si f est croissante sur A alors (u_n) est monotone, plus précisément :

- si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante
- si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante

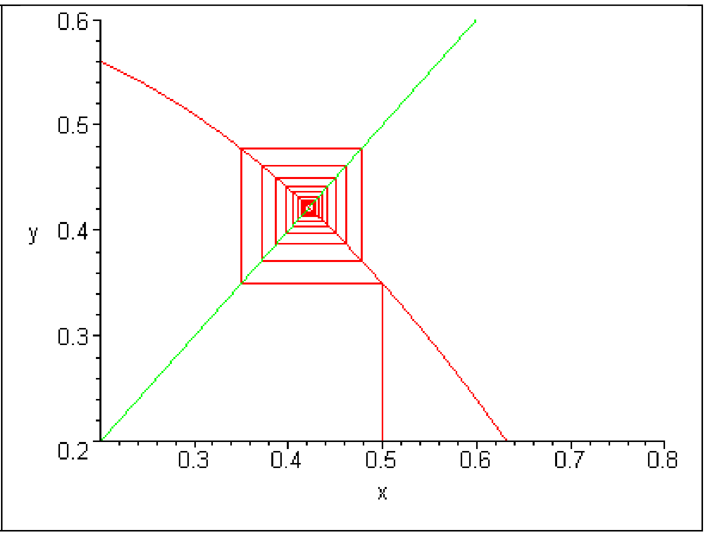
Remarque : Si f est décroissante sur A alors (u_n) n'est pas, en général, monotone mais on a alors $f \circ f$ croissante, donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones.

Théorème: Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers ℓ et f **continue** en ℓ alors, ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$

Exemples :

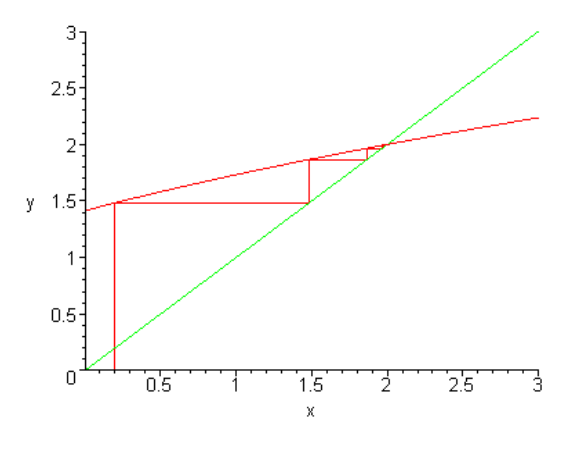
- Pour une suite définie par $u_0 = 0.5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0.6 - u_n^2$, on obtient :

```
➢ f:=x->.6-x^2:
➢ s(f,.5,17,.2,.8,.2,.6);
```



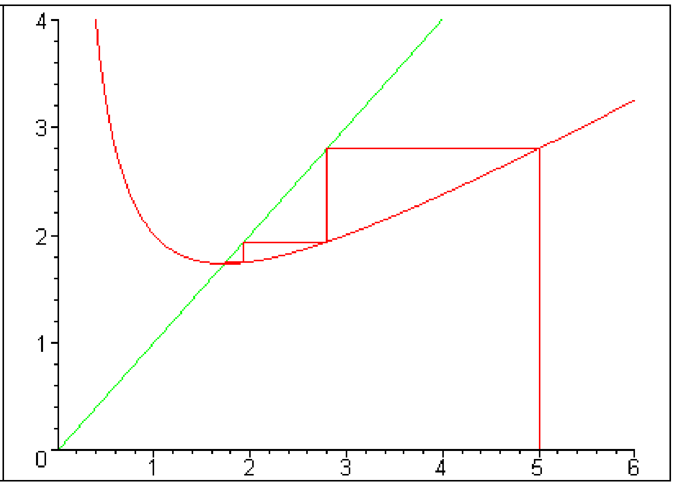
- Si (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$:

```
> s:= proc(f,u0,N,x0,x1,y0,y1)
    local u,L,n,c1,c2;
    u[0]:=u0:L:=[u[0],0]:
    for n from 0 to N do u[n+1]:=f(u[n]):
        L:=L,[u[n],u[n+1]],[u[n+1],u[n+1]]
    od:
    c1:=plot({x,f(x)},x=x0..x1,y=y0..y1):
    c2:=plot([L]):display({c1,c2}):
 end:
f:=x->sqrt(x+2):s(f,.2,5,0,3,0,3);
```



- Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$:

```
➢ f:=x->(1/2)*(x+3/x):
➢ s(f,5,3,0,6,0,4);
```



Cas particuliers de suites récurrentes d'ordre 1 :

i) Suites arithmétiques

Définition :

Une suite $(u_n)_n$ de K est dite **arithmétique** s'il existe $r \in K$ tel que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
La constante r est appelée **raison** de la suite arithmétique.

Proposition :

- Le terme général de rang n de la suite arithmétique de raison r est $u_n = u_0 + nr$.
- La somme des (n + 1) premiers termes d'une suite arithmétique est égale à :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$

ii) Suites géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_n$ de K est dite **géométrique** s'il existe $q\in K$ tel que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = qu_n$.
La constante q est appelée **raison** de la suite géométrique.

Proposition :

- Le terme général de rang n de la suite géométrique de raison q est $u_n = u_0q^n$.
- La somme des (n + 1) premiers termes d'une suite géométrique est égale à :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \text{ pour } q \neq 1 \text{ et } S_n = (n + 1)u_0 \text{ pour } q = 1.$$

iii) Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_n$ de K est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b)\in \mathbb{R}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} = \mathbf{a}\, u_n + \mathbf{b}$**.**

Méthode d'étude : pour $a \neq 1$, on chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$ puis on montre que la suite de terme général $(u_n - \alpha)$ est une suite géométrique de raison a et on en déduit u_n en fonction de u_0.

b) Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite **suite récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants** s'il existe $(a, b)\in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $u_{n+2} = \mathbf{a}\, u_{n+1} + \mathbf{b}\, u_n$ avec u_0 et u_1 réels donnés.

Méthode (lorsque $b \neq 0$) : on résout l'équation caractéristique $\mathbf{r^2 = a\, r + b}$ **(1)**

ii) si **(1)** a 2 solutions distinctes r_1 et r_2 alors : $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$
iii) si **(1)** a une unique solution r alors : $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda\, n + \mu)\, r^n$
iv) si **(1)** a 2 solutions complexes conjuguées $r = \rho\, e^{i\theta}$ et $\overline{r}$ alors :
$\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n (\lambda\cos n\, \theta + \mu \sin n\, \theta)$

Rq : λ et μ sont déterminés par u_0 et u_1.